série Eixos

Sergio Ricardo Master Penedo

SISTEMAS DE CONTROLE

Matemática Aplicada a Projetos

Controle e Processos Industriais

érica

Agradecimentos

À Editora Érica, por ter me aberto a possibilidade de realizar o sonho antigo de disseminar conhecimento por meio desta obra e, em especial, a Rosana Arruda, Carla Morais e Silvia Campos, que muito me auxiliaram nos primeiros passos desta nova realidade profissional.

Ao amigo Francisco Capuano, que me inspirou com seus livros - de meus primeiros passos como estudante de curso técnico até os ótimos tempos de meu curso de Engenharia Elétrica - e que hoje tenho como colega de trabalho e, sobretudo, como ser humano de minha alta estima, dentro e fora de nosso ambiente profissional.

Aos meus pais, Dilson e Vera, que plantaram em mim o desejo de aprender, aprender e aprender, pois nunca sabemos o bastante.

À minha esposa Tatiana e aos meus filhos Maurício e Fernando, nos quais deposito toda a minha dedicação diária. Sem eles, minha vida não faz o menor sentido.

Sobre o autor

Sergio Ricardo Master Penedo é doutor em Engenharia Elétrica pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (2014), área de formação em que também é mestre (UFSC, 2000) e graduado (UFPA, 1998).

É docente do Ensino Superior desde 2002 em cursos de Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica, Engenharia Mecatrônica, Engenharia de Telecomunicações e Engenharia de Produção, tendo exercido também funções de Coordenação de Curso de Engenharia Elétrica, Engenharia Mecatrônica, Engenharia Mecânica, Engenharia Química e Engenharia de Produção.

Possui dezenas de trabalhos em anais de eventos nacionais e internacionais, além de registros de *software*. Foi agraciado com o Prêmio Jovem Cientista em trabalho voltado ao auxílio do treinamento de deficientes auditivos por meio de ferramentas de processamento de sinais e programação.

Atua nas áreas de Engenharia Elétrica, Engenharia de Produção e Ciência da Computação, com ênfase na pesquisa e orientação de trabalhos em Automação e Controle, Processamento de Sinais, Imagens e Vídeo, Robótica, Engenharia Biomédica, Gestão de Sistemas Produtivos, Pesquisa Operacional e Inovação Tecnológica.

Sumário

Apresentação

Esta obra tem por finalidade trazer ao aluno o primeiro contato com sistemas de controle, apresentando conhecimentos elementares de matemática aplicada e de álgebra. O livro busca servir de apoio a outros materiais, procurando desmistificar a tarefa de se projetar um sistema de controle que opere sobre um dado processo ou planta. São fornecidos exemplos de aplicação de sistemas de controle, não se perdendo de vista a necessidade de o aluno buscar aprofundar sempre seus conhecimentos matemáticos, que servem de forte embasamento à compreensão dos conceitos aqui apresentados, ao mesmo tempo em que se procura trazer um foco de compreensão fundamentado em regras específicas de projeto, claras e imediatas.

Esta obra está dividida em onze capítulos. O Capítulo 1 versa sobre o histórico da Teoria de Controle, apresentando conceitos fundamentais desta área de conhecimento. O segundo capítulo apresenta o referencial teórico de manipulação de vetores e matrizes, úteis no entendimento de como se processam algumas das técnicas de controle. O Capítulo 3 traz as representações matemáticas mais usuais de sistemas, apresentando o ferramental necessário à sua manipulação, nos domínios do tempo e da frequência. O Capítulo 4 discute o aspecto da estabilidade de sistemas, focando-se naqueles de primeira e segunda ordens, posto ser esse aspecto a meta fundamental em todo e qualquer projeto de controle. O Capítulo 5 discorre sobre a técnica de Lugar das Raízes, relevante na caracterização da resposta de sistemas. Os Capítulos 6 e 7, apresentam, respectivamente, técnicas rápidas de projeto de sistemas de controle, baseadas na teoria clássica e na construção de Lugar das Raízes. O Capítulo 8 discute o projeto de controladores no domínio da frequência, com ênfase no uso de Diagramas de Bode. O Capítulo 9 apresenta a sintonia de controladores PID por meio das regras de Ziegler-Nichols. O Capítulo 10 apresenta os primeiros elementos de análise de sistemas de controle no espaço de estados, com uma introdução preliminar a projetos. O Capítulo 11, por fim, traz considerações sobre o uso de atuadores e sensores em sistemas de controle aplicados a plantas industriais.

Os apêndices da obra trazem elementos matemáticos importantes ao entendimento da teoria apresentada.

O autor

1

Introdução a Sistemas de Controle

Para começar

Este capítulo tem por objetivo apresentar os conceitos básicos pertinentes a sistemas de controle. O capítulo busca abordar, de forma didática, o conceito de sistema, trazendo à luz as definições de sinal de entrada e resposta, visando a um futuro entendimento de como um sistema de controle opera sobre tais sistemas da natureza. Ao mesmo tempo, o conhecimento histórico exposto consegue trazer ao aluno a justificativa de uso das técnicas de controle, enfatizando a importância da Teoria de Controle em engenharia e tecnologia.

As informações apresentadas neste capítulo constituem uma importante base para a compreensão gradual de todos os conceitos inerentes a sistemas de controle, a partir das definições abrangidas e da metodologia de apresentação utilizada nesta área de conhecimento.

1.1 Histórico da teoria de controle

A noção de "sistema de controle" remonta ao conceito de necessidade de se observar a resposta de uma determinada estrutura a um estímulo de entrada, a fim de que tal resposta seja conduzida a um valor considerado ideal. Tais preceitos se iniciaram na Idade Contemporânea com o estudo da homeostase por Norbert Wiener, especificamente em meados do século passado, advindo, todavia, de tempos mais remotos, quando o homem já se preocupava com a medição precisa do tempo, passando pela Revolução Industrial, pelas grandes guerras e ganhando corpo com o início da chamada corrida espacial, em 1957.

A Teoria de Controle tomou corpo, de fato, a partir da concepção de "controle automático". O primeiro controlador automático industrial de que se tem notícia se refere ao regulador centrífugo concebido em 1775 por James Watts, que intentava prover o controle de velocidade de máquinas a vapor. Em 1868, James Clerk Maxwell deu um passo relevante nas aplicações da Teoria de Controle, ao analisar matematicamente um sistema máquina-regulador realimentado. Durante a Primeira Guerra Mundial, Minorsky desenvolveu o servomecanismo, também baseado em realimentação, que visava à manutenção automática da rota de navios. Em 1948, o trabalho supracitado de Wiener, descrevendo fenômenos neurológicos e os sistemas de controle preexistentes no corpo humano, trouxe considerável progresso no entendimento de sistemas mais complexos. Em 1932, H. Nyquist, funcionário da Bell Labs., elaborou a primeira teoria geral de controle automático com a chamada Teoria da Regeneração, pela qual se estabelecia um critério específico para o estudo da estabilidade de sistemas.

É fato que muito do avanço da Teoria de Controle adveio justamente da compreensão cada vez mais apurada que o homem tinha de seu entorno, envolvendo as noções de medição de tempo e de espaço, bem como de variáveis de processo como temperatura, vazão, pressão, nível, entre outras. Do mesmo modo, a História apresenta relatos de desenvolvimento de reguladores e comparadores, sempre tomando como base o conceito de realimentação, conceito este que atingiu tecnologicamente a produção de máquinas, veículos e dispositivos criados pelo homem. Toda a discussão em torno do controle de sistemas tinha fonte, ao longo dos tempos, da própria definição de "sistema", situada no domínio do conhecimento humano e referente a uma entidade dinâmica sujeita a excitações de entrada e respostas de saída, representativa de um fenômeno natural.

Dentro do campo de análise de sistemas, diferentes estratégias também se fizeram surgir. Técnicas baseadas no domínio do tempo foram confrontadas com outras baseadas no domínio da frequência, que ganharam força com técnicas de controle destinadas à remoção de ruídos. Técnicas baseadas na definição de funções de transferência, diagramas de blocos e lugar geométrico das raízes ensejaram, assim, um avanço na caracterização matemática de respostas de sistemas a entradas conhecidas. Na passagem das técnicas de controle clássico para as de controle moderno, abandonaram-se as técnicas no domínio da frequência e surgiram novamente algoritmos baseados no domínio do tempo. Igualmente, o advento de computadores digitais trouxe benefícios variados à Teoria de Controle Moderno, no sentido de que a resolução de equações associadas a problemas de controle se podia fazer de modo *off-line*. Além disso, características de variância no tempo podem ser mais bem tratadas mediante o emprego de técnicas de processamento digital de sinais.

Fique de olho!

O lançamento do satélite Sputnik pelos soviétivos, disparou uma verdadeira corrida norte-americana por soluções diferentes em controle de trajetória de veículos aeroespaciais, já que se quebraram paradigmas da Teoria de Controle Clássico, motivando um retorno às técnicas antigas de controle – vindo daí o retorno à modelagem de sistemas no domínio do tempo!

Enfim, nos dias atuais, há uma conjunção de técnicas de controle clássico e moderno, de modo a sanar fragilidades deste último grupo ao não fazer uso da intuição proporcionada pelas técnicas baseadas no domínio da frequência, além de não apresentar a mesma robustez daquelas técnicas. Assim, fundem-se vantagens de ambas as escolas, convergindo para uma nova teoria de controle que agrega as melhores características de técnicas clássicas e modernas.

1.2 Noções teóricas básicas

Figura 1.1 - Representação gráfica de um sistema.

1.2.1 Definição de sistema

Define-se sistema como a representação de qualquer fenômeno natural, físico ou químico, sujeito a estímulos externos (ditos *sinais de entrada* ou *variáveis de controle*) e produzindo respostas a tais estímulos (ditos *sinais de saída* ou *variáveis controladas*), como pode ser visto na Figura 1.1. Um sistema, de modo peculiar, simboliza um conjunto de elementos intrinsecamente conectados, formando um conjunto internamente organizado. De modo geral, um sistema é dotado da capacidade de gerar uma saída específica a uma entrada conhecida (saída esta exata ou ao menos aproximada), de maneira que a integração de suas partes conduz a um resultado combinado dos efeitos individuais de cada porção. São exemplos de sistema um foguete em sua trajetória espacial, um automóvel em movimento ou mesmo um chuveiro aberto, derramando água durante seu banho!

Matematicamente, um sistema pode ser classificado como linear ou não linear. Diz-se linear aquele sistema regido por finitas relações matemáticas entre saída e entrada dispostas em também finitas equações lineares - em outras palavras, por equações algébricas que contêm apenas variáveis de primeiro grau, ou por equações diferenciais lineares obtidas de leis físicas que governam um dado sistema em particular, de modo que vale o chamado princípio da superposição (a resposta para vários sinais de entrada equivale à soma das respostas individuais a cada um dos sinais de entrada). Por sua vez, sistema não linear é aquele cujas variáveis não obedecem às condições de linearidade. Em outras palavras, um sistema é chamado de linear quando é representado por equações lineares: matematicamente, é aquele em que, se x_1 e x_2 são soluções de tal sistema e c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, logo $c_1x_1 + c_2x_2$ também é solução do sistema - aplica-se o chamado princípio da superposição. Por exemplo:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \Rightarrow \text{ compõe um sistema linear}$$

$$4{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + 5{x_3}^2 = 16 \Rightarrow \text{ não compõe um sistema linear}$$

Deste modo, a condição de linearidade de sistemas descreve uma categoria particular de sistemas a que as técnicas de controle descritas nesta obra se aplicam. É possível, por meio da linearização de sistemas não lineares, objeto de seção descrita no Apêndice desta obra, proceder às mesmas técnicas utilizadas para sistemas lineares.

1.2.2 Termos usuais em sistemas de controle

Além da definição formal de sistemas, apresentada na seção anterior, há um glossário de termos que devem ser rigorosamente assimilados para que a compreensão acerca de sistemas de controle se faça mais evidente. São eles:

- Planta: dispositivo ou equipamento que tem por finalidade executar dada tarefa (por exemplo, motor, braço robótico, entre outros).
- Processo: fenômeno, natural ou artificial, que obedece a leis matemáticas bem descritas. É, na verdade, a essência do funcionamento de um sistema (por exemplo, fermentação, destilação fracionada, queda de preço de uma mercadoria, entre outros).
- Especificações de desempenho: descrições do comportamento a ser apresentado pelo sistema, de acordo com o desejado pelo usuário.
- Sistema: conjunto ou coleção de partes, dentro de um universo maior, que estão interligadas ou relacionadas de tal modo a constituírem um todo.
- Controlador: dispositivo empregado para se perfazer o controle de um sistema, ou seja, atingir as especificações de desempenho desejadas.
- Sistema de controle: conjunto formado por sistema a ser controlado e controlador.
- *Setpoint*: valor desejado para o sinal de saída de um sistema, dada uma entrada conhecida.
- Malha aberta: categoria de sistema (ou de malha de controle) em que o sinal de saída depende apenas das características do sistema e dos sinais de entrada deste sistema (por exemplo, veículo sem pedal do freio, máquina de lavar). Em outras palavras, a ação de controle independe da saída apresentada pelo processo que se deseja controlar.
- Malha fechada: categoria de sistema (ou de malha de controle) em que o sinal de saída depende não somente das características do sistema e dos sinais de entrada deste sistema, como também dos sinais prévios de saída (por exemplo, veículos de carga com velocidade controlada por dispositivo).
- Distúrbio ou perturbação: todo e qualquer sinal que venha a provocar interferência ou distorção nos sinais presentes em um sistema (por exemplo, ruído acústico, "manchas" em imagens transmitidas, perdas de *bits* em pacotes de dados de uma rede, radiação eletromagnética interferente em um sinal de rádio). Em uma malha de controle, são especialmente importantes as perturbações de processo (*load disturbances*) e as perturbações de *setpoint*.
- Controle preditivo (*feedforward*): estratégia de controle realizada unicamente com base nos dados de entrada. Para sua aplicação, o controlador deve entender as relações de causa e efeito relativas ao comportamento do processo.
- Realimentação (*feedback*): laço de "retorno" do sinal de saída à entrada, com o fim de elevar (realimentação positiva) ou reduzir (realimentação negativa) o nível de sinal a alimentar a planta - e, portanto, buscar a obtenção de um sinal de saída desejado. Nessa estratégia de controle, é realizada uma comparação entre o resultado obtido e o desejado.
- Ordem de um sistema: ordem da equação diferencial que o representa.

Os conceitos de malha aberta e malha fechada devem ser detalhadamente descritos e explorados, sendo objetos das seções seguintes deste capítulo.

1.2.3 Sistema em malha aberta

Feitas as observações iniciais sobre o conceito de sistema, vamos, agora, aprender sistemas em malha aberta e em malha fechada.

Define-se como sistema em malha aberta o sistema em que *não há realimentação* da saída à entrada, ou seja, a saída é observada apenas a partir de suas amostras instantâneas, não estabelecendo qualquer conexão com o sinal de entrada, direta ou indiretamente. A Figura 1.2 ilustra graficamente um sistema em malha aberta.

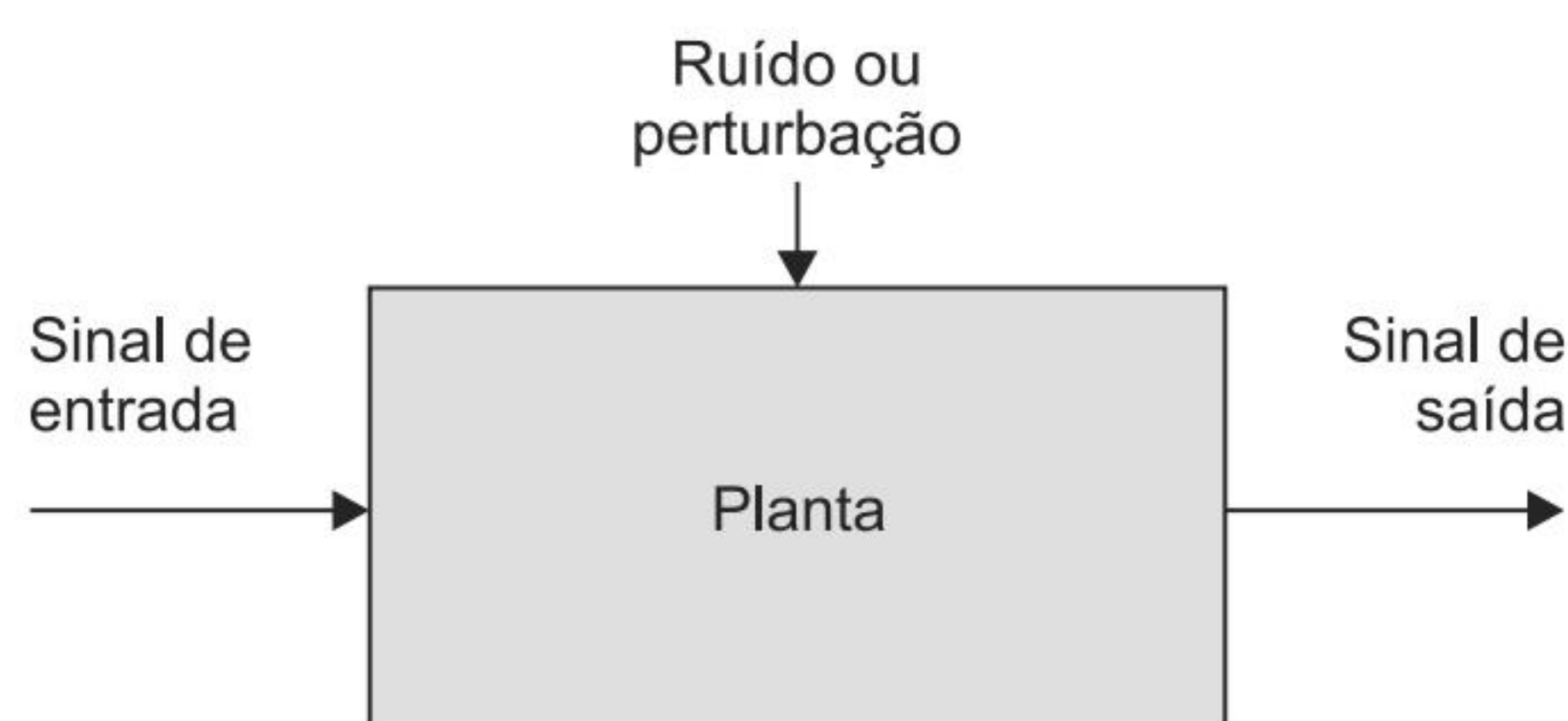



Figura 1.2 - Sistema em malha aberta.

Conforme observado na Figura 1.2, um sistema em malha aberta é afetado por perturbações cujos efeitos são observados no sinal de saída, não havendo como reduzirem-se tais efeitos a partir da mera observação dessa saída. Neste caso, a saída fornece ao observador apenas uma indicação da resposta do sistema, não viabilizando meios para o controle automático dessa resposta.

1.2.4 Sistema em malha fechada

Define-se como sistema em malha fechada aquele em que *há realimentação* da saída à entrada, ou seja, a saída não somente é observada apenas a partir de suas amostras instantâneas como também exerce efeito sobre a entrada do sistema, por meio da geração de um sinal de erro. A Figura 1.3 ilustra graficamente um sistema em malha fechada.

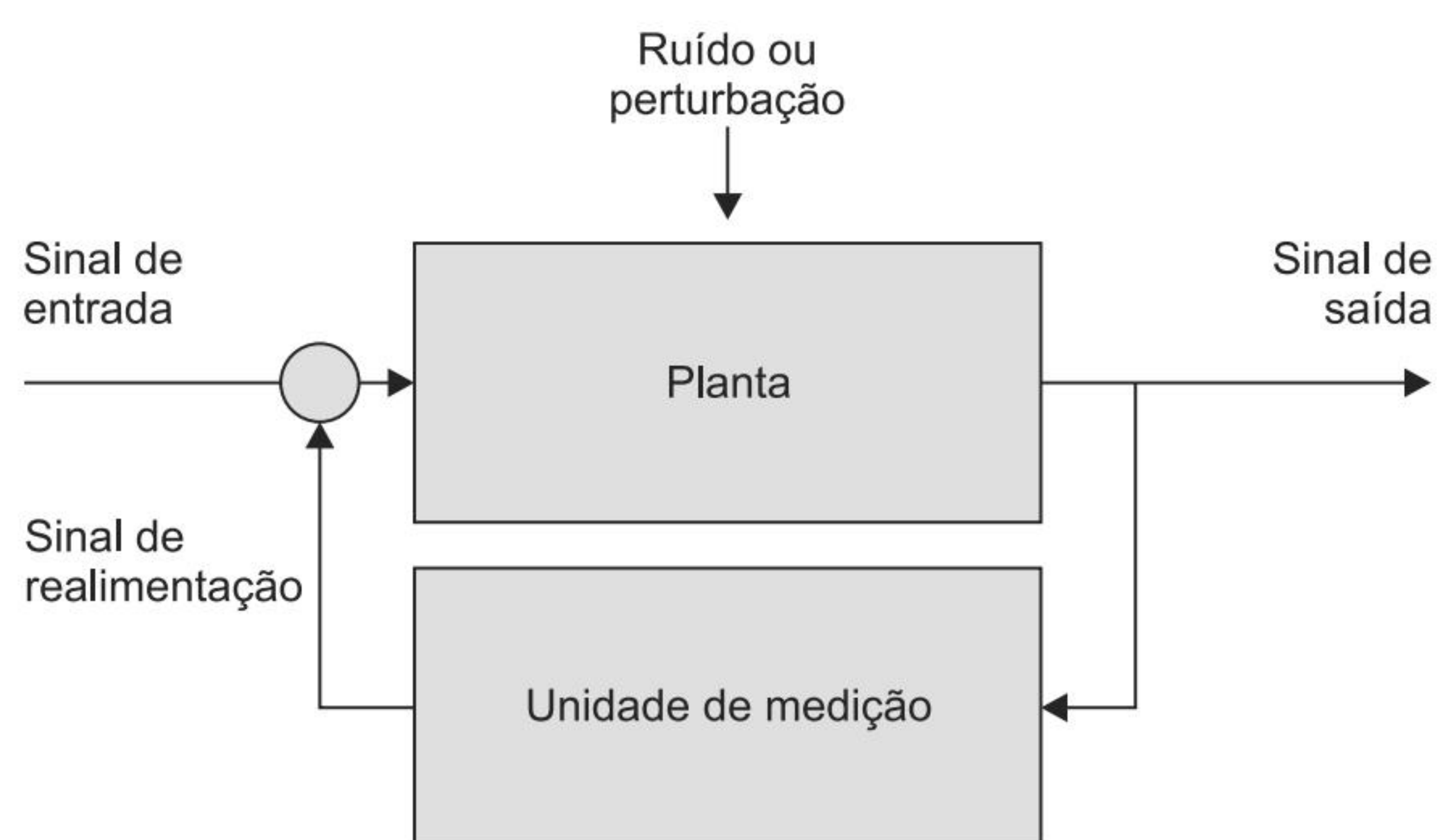



Figura 1.3 - Sistema em malha fechada.

Conforme observado na Figura 1.3, um sistema em malha fechada, ao ser afetado por perturbações cujos efeitos são observados no sinal de saída, admite o ajuste do sinal de entrada a partir da geração de um sinal realimentado que é adicionado (realimentação positiva) ou subtraído (realimentação negativa). Deste modo, um sinal de erro, obtido da conjunção dos sinais de entrada e de realimentação, é reinserido continuamente na planta, de modo que a comparação contínua entre o valor atual de saída e o valor de *setpoint* conduz a uma ação de correção que produz uma convergência de um valor a outro. Nessas condições, o elemento que gera o sinal de erro a ser inserido na planta recursivamente recebe também a denominação de *elemento final de controle*.

Um sistema de controle em malha fechada pode ser mais bem caracterizado pelo desmembramento da malha em mais subpartes, como ilustrado na Figura 1.4. Nesta concepção, são definidas unidades de *comparação*, de *controle em malha direta*, de *atuação* e de *medição* (ou *sensor*). Admite-se também que haja ruído no processo de medição, igualmente afetando o desempenho da planta.

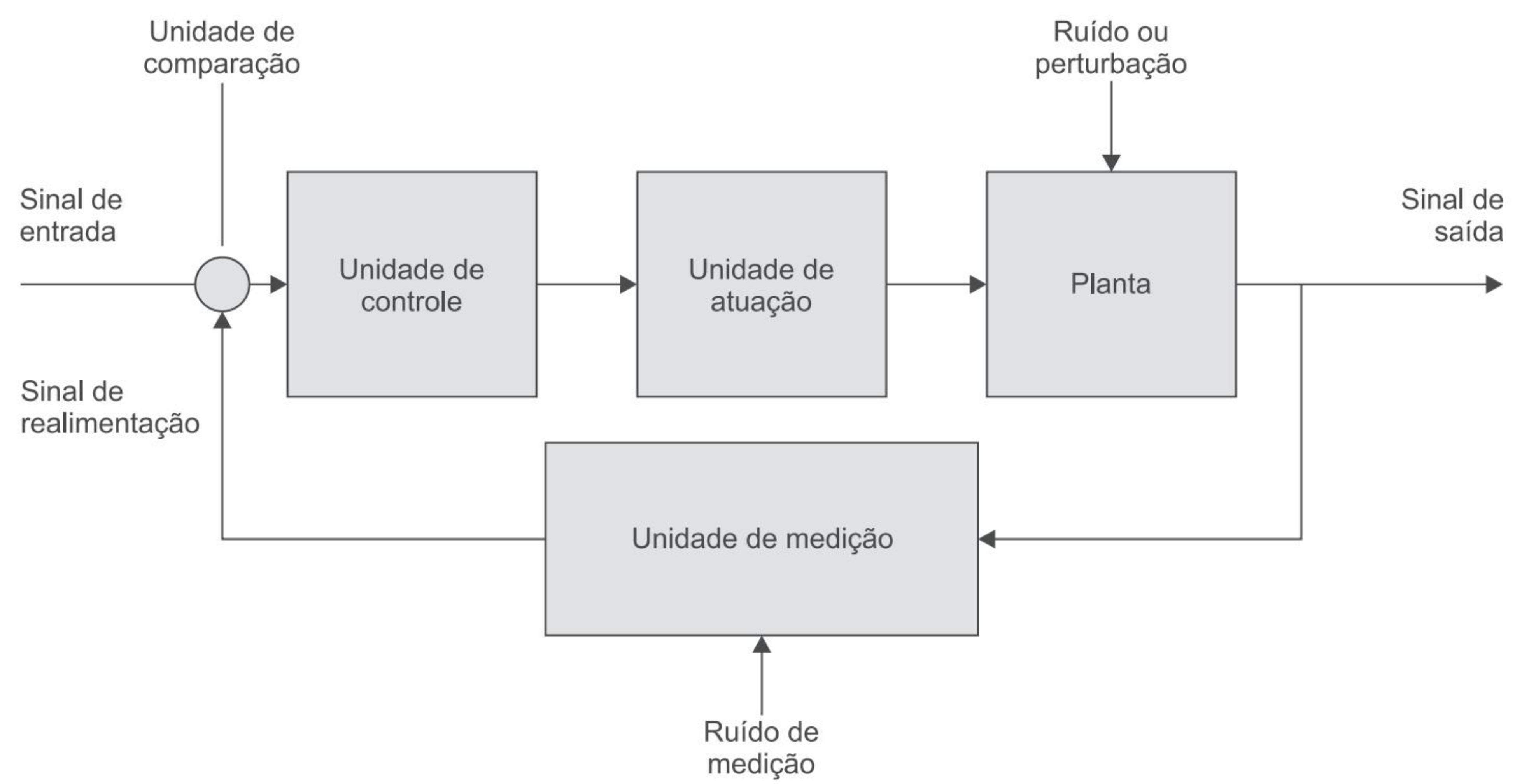



Figura 1.4 - Sistema em malha fechada - descrição detalhada da malha de controle.

A Tabela 1.1 sumariza vantagens e desvantagens dos sistemas em malha aberta e malha fechada.

Fique de olho!

Em rápida análise, sistemas de controle em malha fechada tiram proveito do fato de que a realimentação torna a resposta do sistema relativamente insensível a perturbações externas e variações paramétricas do sistema, a um menor custo. Isso não ocorre com sistemas de controle em malha aberta, que, por não considerarem a realimentação como proposta, acarretam ao sinal de saída do sistema uma total vulnerabilidade a perturbações externas - sendo assim destinados somente a situações em que os sinais de entrada são previamente conhecidos e imunes a distúrbios externos.

Tabela 1.1 - Vantagens e desvantagens das categorias de sistema de controle - malha aberta *versus* malha fechada

Categoria de sistema	Vantagens	Desvantagens
Malha aberta	» São de simples construção e de fácil manutenção. » São menos dispendiosos que um sistema correspondente em malha fechada. » Não apresentam problemas de estabilidade. » São apropriados quando há dificuldades de avaliação dos sinais de saída ou quando a medição precisa da saída não é economicamente possível.	» Distúrbios e mudanças na calibração provocam erros, e a saída pode apresentar distorções em relação ao padrão esperado. » Para que a saída mantenha a qualidade requerida, é necessária uma regulagem periódica.

continua

Categoria de sistema	Vantagens	Desvantagens
Malha fechada	» O emprego de realimentação faz com que a resposta do sistema seja relativamente insensível a distúrbios e variações internas nos parâmetros do sistema. » É possível a utilização de componentes relativamente imprecisos e de baixo custo para se atingir o controle preciso de determinado sistema. » São mais vantajosos nos casos em que houver distúrbios e/ou alterações não previsíveis nos componentes do sistema.	» São de mais complexa implementação e de maior custo. » Atrasos temporais podem ocasionar oscilação na saída e até mesmo instabilidade.

Fique de olho!

A descrição e exemplificação de sistemas de controle sob tal enfoque será revisitada no Capítulo 3, que descreve em domínios matemáticos (do tempo e da variável transformada) sinais e sistemas, e mais bem detalhada no Capítulo 5, quando se descrevem diferentes estratégias de controle.

Exercício resolvido

Considere o sistema de controle de velocidade de um automóvel ilustrado na Figura 1.5. Identifique os elementos da malha de controle atuante nesse sistema.

Solução

Trata-se de um sistema de controle em malha fechada. A planta é compreendida pelo automóvel em si. O sinal de entrada ou de referência é a velocidade desejada. O sinal de saída ou observado é a velocidade atual. A unidade de medição do sensor é o velocímetro. O sinal realimentado (ou medido) é a velocidade medida. O sinal de controle derivado do controlador é a inclinação do pedal do acelerador. A unidade de atuação é o motor do veículo. O ruído ou perturbação atuante sobre a planta é a inclinação da estrada, e o ruído de medição é a trepidação do ponteiro do velocímetro.

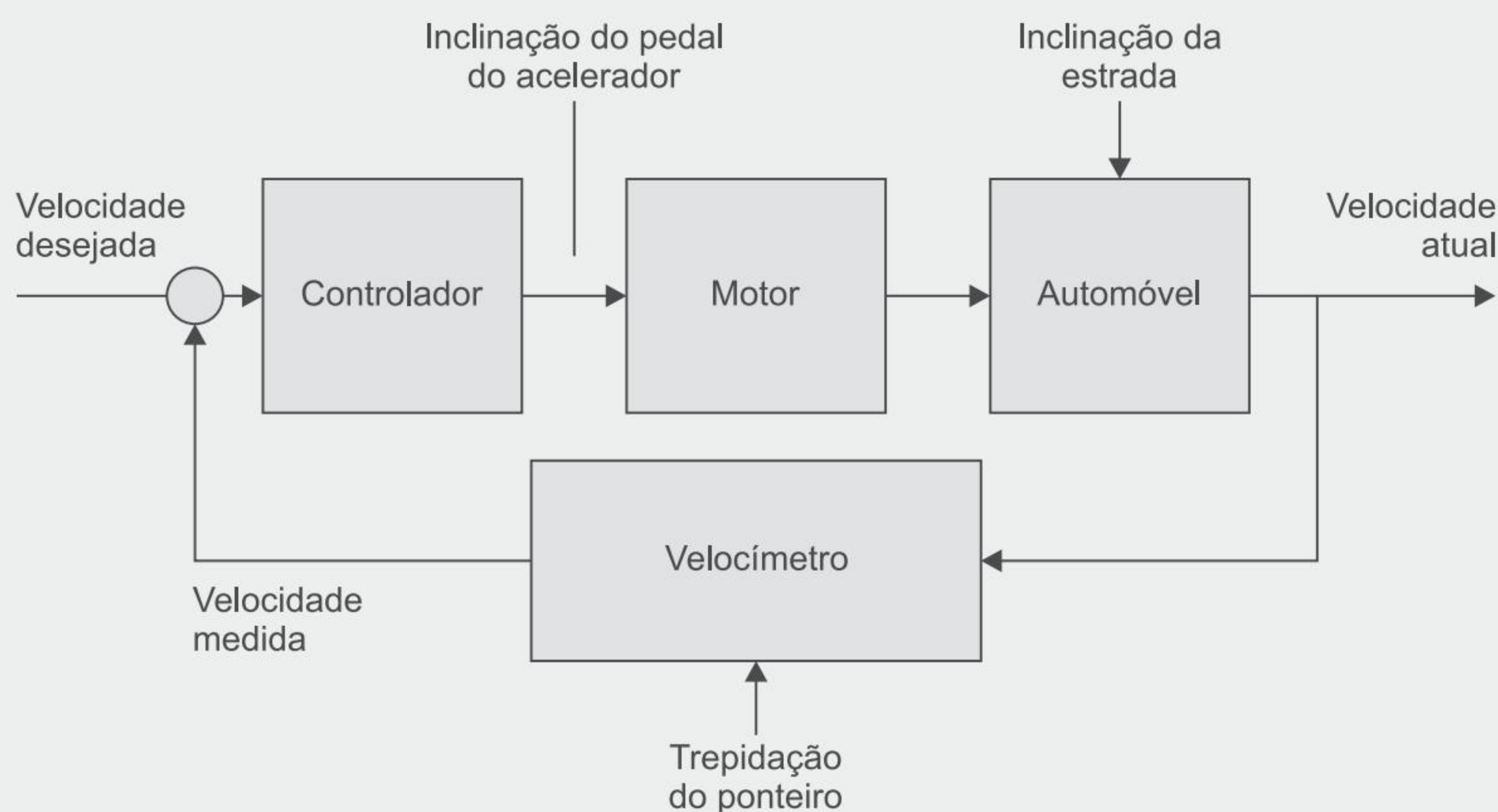



Figura 1.5 - Sistema de controle de velocidade de um automóvel.

Em suma, como será detalhado em capítulos posteriores e como decorrente da caracterização aqui apresentada acerca de sistemas em malha fechada (ou realimentados), um sistema dessa categoria deve atender a requisitos específicos para sua ação adequada:

» Robustez a perturbações ou distúrbios: um sistema em malha fechada deve prever e combater distúrbios atuantes sobre a planta, de modo a combater com êxito o efeito de tais distúrbios.

» Erro em regime estacionário: um sistema em malha fechada deve manter controlado o erro quando da convergência do sinal de saída ao valor desejado.

» Características em regime transitório: um sistema em malha fechada deve atender a requisitos específicos em sua saída enquanto esta não atinge o valor de *setpoint*, condição que recebe a denominação de *regime transitório*. Valores específicos e desejados de tempo, bem como valores máximos que a saída deve apresentar nessa condição de regime, são parâmetros de projeto de controladores, como será visto nos Capítulos 4 e 5.

1.3 Modelagem de sistemas físicos

Na descrição de sistemas, o número elevado de variáveis envolvidas torna complexa sua precisa caracterização, conquanto as respostas a determinados sinais de entrada possuam dependência com uma enorme gama de parâmetros e critérios. Nesse sentido, a tarefa de modelar um sistema, restringindo suas características a um menor, mas suficiente conjunto de descrições, torna sua representação matemática adequada ao estudo, mantendo ainda a robustez necessária para predizer seu comportamento a praticamente todas as possíveis condições de entrada.

Ao se definir assim um modelo como uma representação substitutiva da realidade de um sistema, estabelece-se uma formulação ou equacionamento que expressa as características de um sistema físico, em termos matemáticos. Salienta-se, porém, que, por mais precisão que um modelo físico contenha, a partir de equações cada vez mais complexas, esse modelo nunca será exato.

Fique de olho!

Um modelo corresponde à descrição matemática das características dinâmicas de um sistema adequado à sua análise. A partir de seu modelo, um sistema pode ser avaliado por meio de ferramentas computacionais, advindo daí a necessidade de que tal modelo seja simples o suficiente para ser implementado, mas complexo o bastante para garantir precisão em seus resultados.

Sistemas podem ser divididos, quanto ao número de sinais de entrada e correspondentes sinais de saída, em duas categorias: SISO (*Single Input - Single Output*), Figura 1.6, ou *monovariáveis*, e MIMO (*Multiple Input - Multiple Output*), Figura 1.7, ou *multivariáveis*, de acordo com suas características de mapeamento de entradas e saídas. Podem ainda ser *contínuos*, se existem para todo valor real de tempo, ou *discretos*, se operam apenas sobre valores inteiros de tempo.

Figura 1.6 - Sistema SISO.

Figura 1.7 - Sistema MIMO.

São variados os exemplos de modelos em engenharia, como mostram as Figuras 1.8 a 1.10.

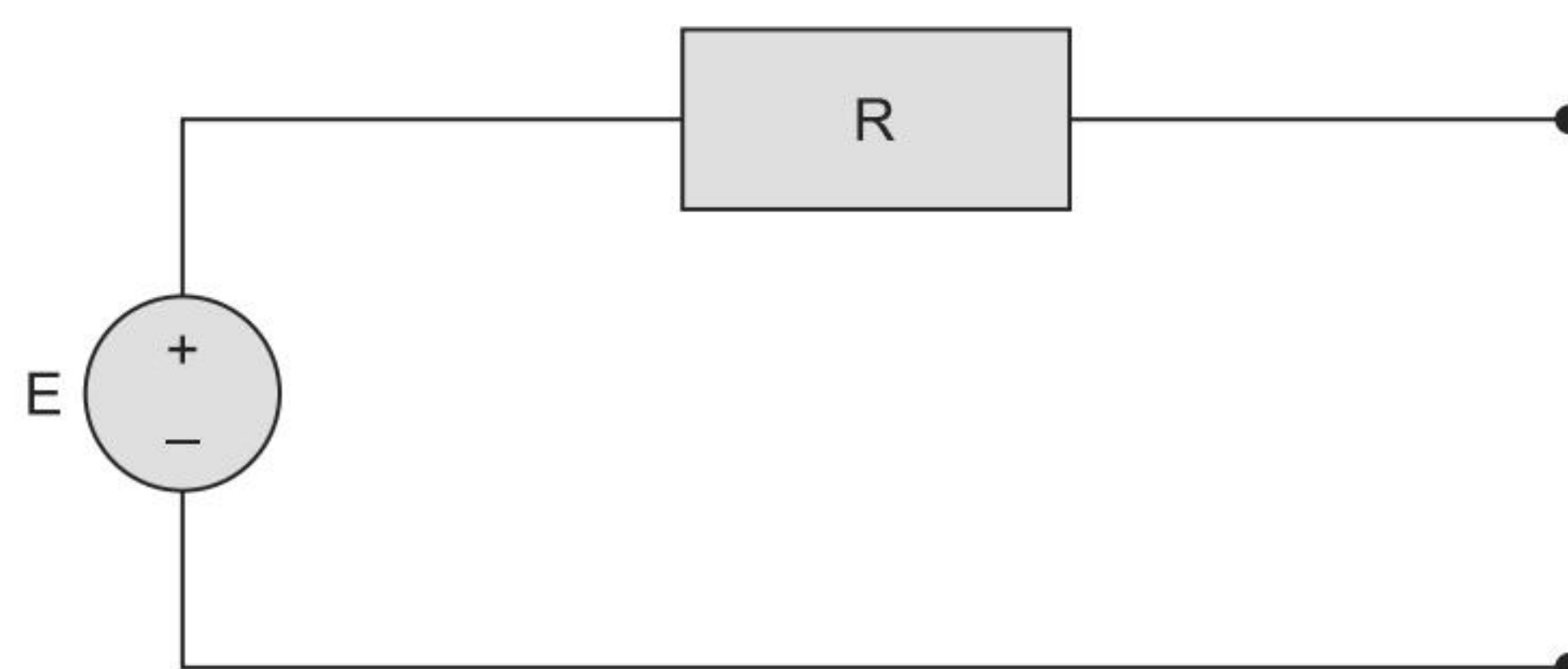



Figura 1.8 - Modelo de uma fonte de tensão real E.

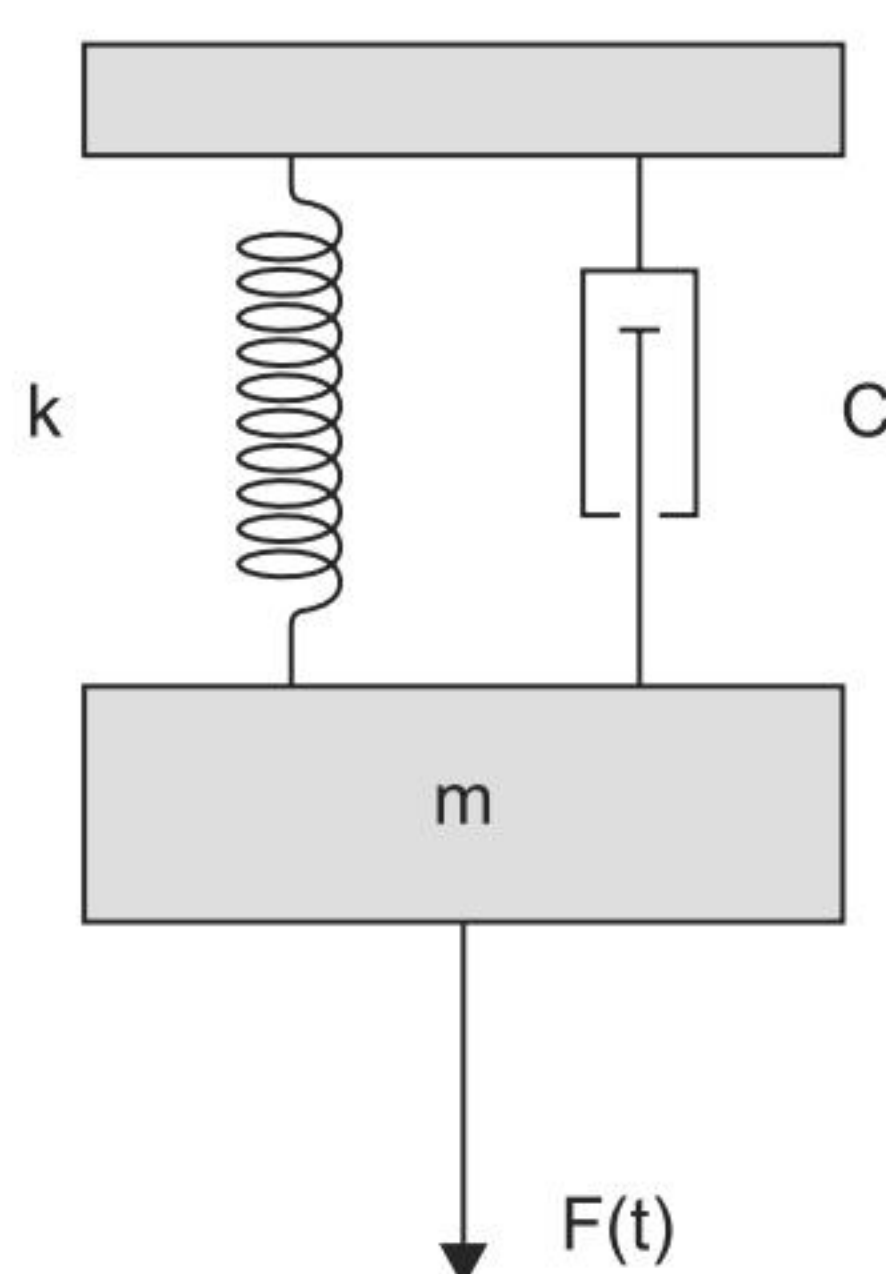



Figura 1.9 - Modelo de um sistema massa-mola-amortecedor.

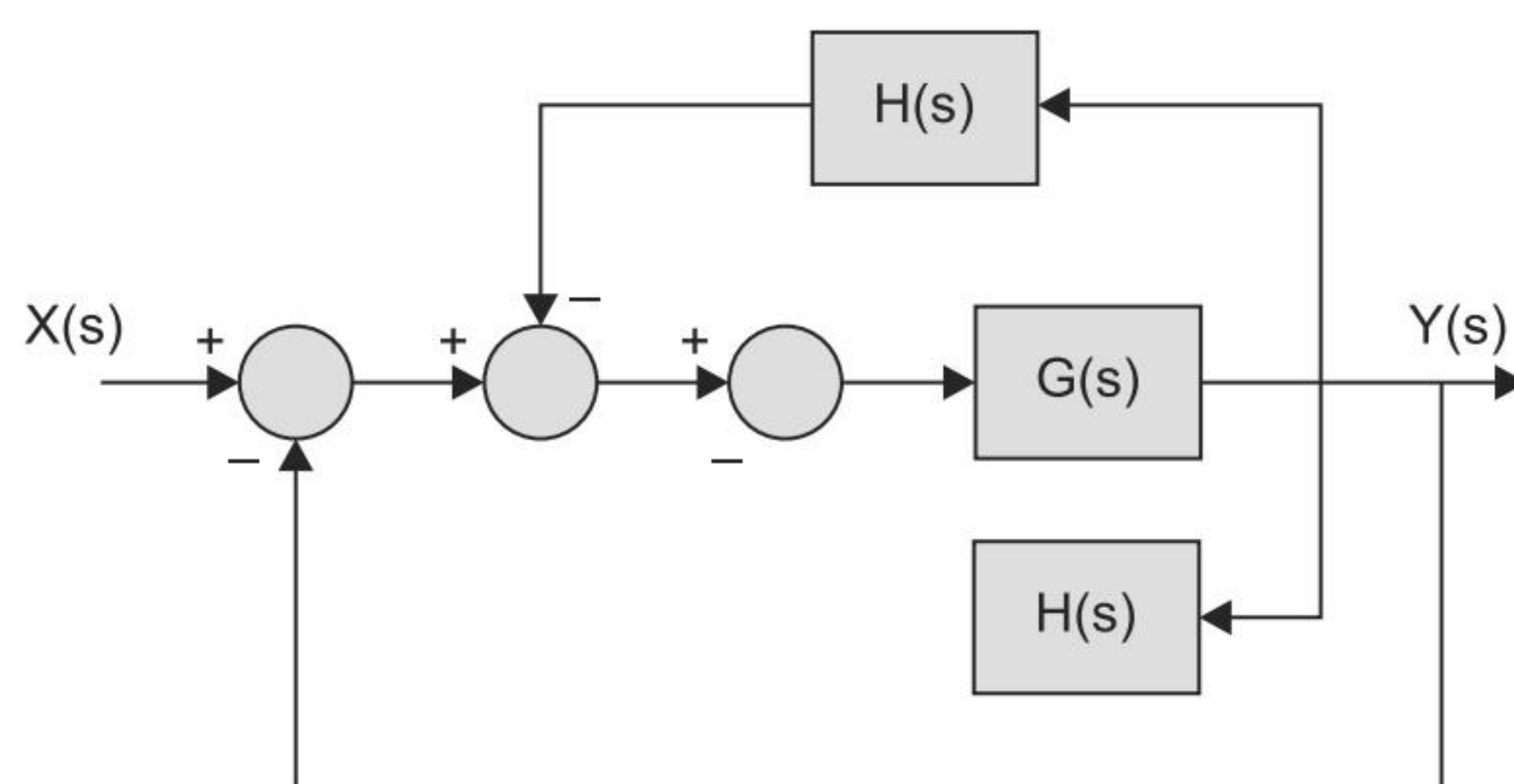



Figura 1.10 - Modelo no domínio transformado de sistema realimentado para controle de nível em um tanque.

Para a obtenção de modelos de sistemas, são utilizadas leis físicas que os descrevam, usualmente baseadas em equações diferenciais lineares, a partir de que saída é obtida para diferentes possibilidades de entrada: resposta a um sinal impulsivo (no domínio do tempo), resposta a uma entrada senoidal (no domínio da frequência), entre outras.

Desta forma, o uso conjugado de adequadas técnicas que descrevam o comportamento dos sistemas a entradas específicas em regime transitório e permanente, aliado a um bem descrito modelo matemático que traduza com propriedade as características físicas reais de uma planta, facilita o estudo de estratégias de controle aplicadas a tais plantas. Os próximos capítulos descreverão com a devida base os procedimentos dedicados ao projeto de sistemas de controle, partindo-se da necessária base matemática à quantificação específica de parâmetros de controladores.

Vamos recapitular?

Foram descritas neste capítulo as noções básicas de controle de sistemas/plantas representativos de fenômenos naturais, bem como ressaltada a importância do modelamento de tais sistemas, visando ao adequado projeto de controladores que se prestem a ajustar sinais de saída desses sistemas a valores desejados.

O capítulo abordou, ainda, características detalhadas de sistemas de controle em malha aberta e malha fechada, de modo a pontuar vantagens e desvantagens de tais estratégias, úteis às etapas de projeto de controladores que são descritas nos próximos capítulos.

Agora é com você!

1) Destaque e caracterize os elementos de controle envolvidos em um processo simples de troca de calor existente em um *freezer* doméstico. Aponte eventuais modalidades de ruído presentes na planta e na medição de temperatura, apontando a função de cada elemento de controle.

2) Identifique nos exemplos a seguir a aplicação de sistemas de controle de malha aberta ou malha fechada: (a) controle de uma máquina de secar roupas; (b) controle manual de abertura de uma válvula de chuveiro, de acordo com sua temperatura; (c) controle de trajetória de um foguete.

3) Para você, o corpo humano é um sistema de controle em malha aberta ou malha fechada? Justifique sua resposta a partir de exemplos.

2

Elementos de Álgebra Linear

Para começar

Este capítulo tem por objetivo apresentar o ferramental matemático mínimo necessário ao entendimento de como sistemas de controle são aplicados a outros sistemas, com o objetivo de adequar seus sinais de saída a requisitos desejados. A álgebra linear se refere ao campo da matemática que estuda de modo detalhado os sistemas lineares, compostos de equações algébricas ou diferenciais. Como a tais sistemas são aplicados sistemas de controle para obtenção de sinais de resposta específicos, o entendimento das relações matemáticas em álgebra linear é relevante ao bom projetista de controle.

Serão apresentadas neste capítulo entidades matemáticas como vetores, matrizes e sistemas, trazendo o embasamento necessário aos capítulos posteriores.

2.1 Vetores e matrizes

Define-se vetor como o segmento de reta orientado dotado de módulo (ou magnitude), direção e sentido, representando um espaço vetorial de n dimensões. Aos vetores podem ser aplicadas operações de adição, subtração, escalonamento e inversão. A eles também se aplicam propriedades de comutatividade, associatividade e distributividade.

Um vetor $\vec{v}$ é representado a partir de suas componentes em *n* dimensões. No espaço tridimensional, obedece-se a notação de decomposição de um vetor em três dimensões, em que se dispõem três vetores unitários nas direções X, Y e Z, denominados $\langle \hat{i}, \hat{j}, \hat{k} \rangle$. Por exemplo, o vetor $\vec{v} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ é descrito no espaço vetorial tridimensional, possuindo componentes escalares

4, 3 e 6, ao longo dos eixos X, Y e Z, respectivamente. Deste modo, tais componentes descrevem as coordenadas cartesianas tridimensionais da extremidade do vetor em questão, como na Figura 2.1.

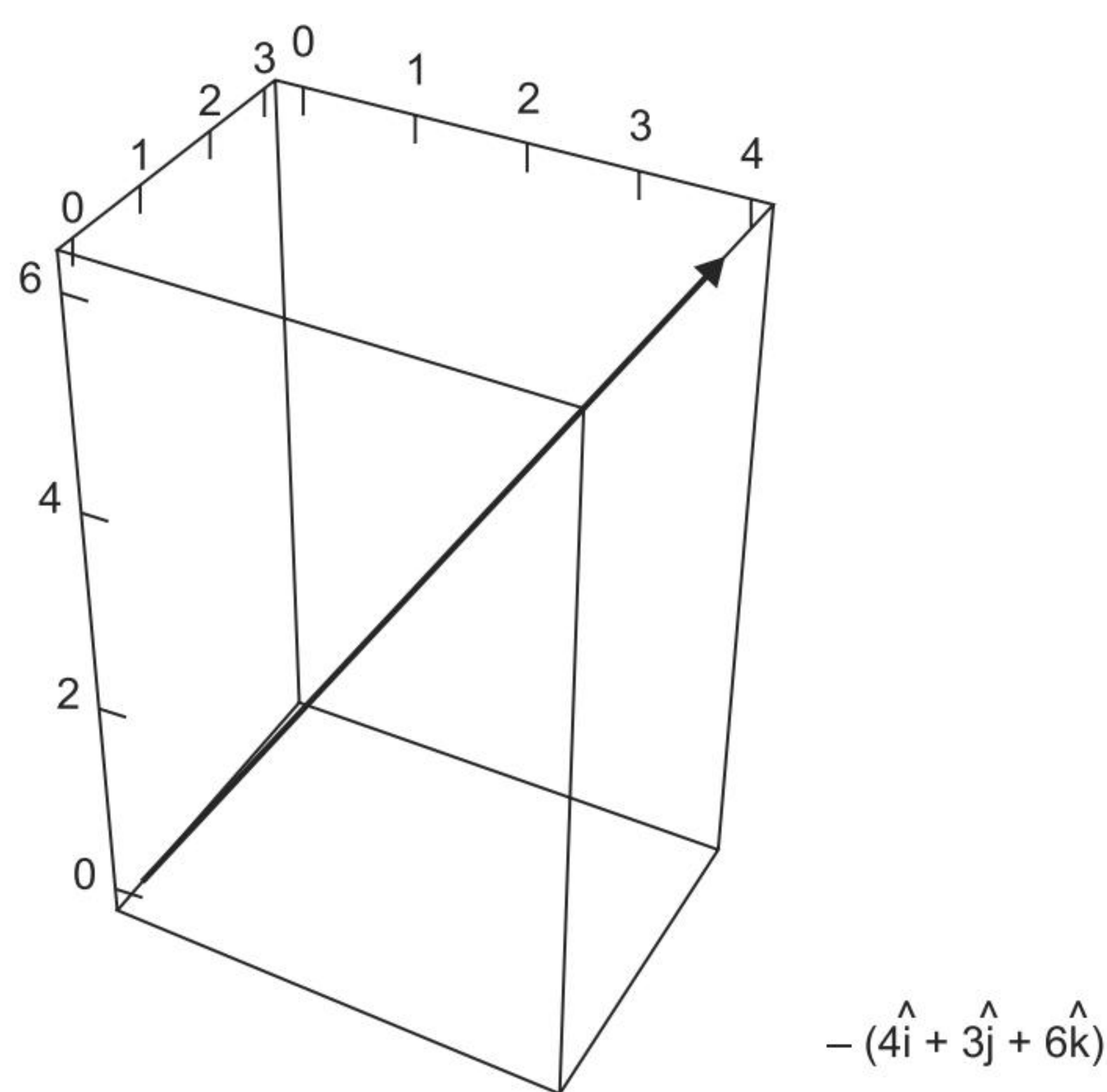



Figura 2.1 - Vetor $\vec{v} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$.

A definição de matriz é uma extensão da definição da entidade vetor, representando uma tabela de *m* linhas e *n* colunas (e assim sendo rotulada de matriz de dimensões $m \times n$), também útil na análise de sistemas de equações lineares. Quando uma das dimensões da matriz é igual à unidade, ela se reduz a um vetor. São exemplos de matrizes:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{entre outros.}$$

Nos exemplos citados, as dimensões são 2×2 e 3×1, respectivamente. Genericamente, o elemento $m_{i,j}$ de uma matriz se situa na *i*-ésima linha e na *j*-ésima coluna.

2.1.1 Operações com vetores

Vetores podem ser operados matematicamente sob diversas situações:

a) Adição/subtração de vetores

A adição/subtração de vetores obedece à adição/subtração de seus componentes ao longo de cada eixo cartesiano.

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \\ \vec{w} &= w_x\hat{i} + w_y\hat{j} + w_z\hat{k} \\ \vec{v} + \vec{w} &= (v_x + w_x)\hat{i} + (v_y + w_y)\hat{j} + (v_z + w_z)\hat{k} \\ \vec{v} - \vec{w} &= (v_x - w_x)\hat{i} + (v_y - w_y)\hat{j} + (v_z - w_z)\hat{k} \end{aligned} \tag{2.1}$$

b) Multiplicação de um vetor por um escalar

A multiplicação de um vetor por um escalar é similar à operação em escalares puros.

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$
$$\vec{w} = \alpha\vec{v} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$
$$\vec{w} = \alpha v_x\hat{i} + \alpha v_y\hat{j} + \alpha v_z\hat{k}$$

c) Produto escalar ou produto interno

O produto escalar (ou interno) entre dois vetores é expresso pela Equação 2.3, resultando em um escalar.

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$
$$\vec{w} = w_x\hat{i} + w_y\hat{j} + w_z\hat{k} \tag{2.3}$$
$$\vec{v}.\vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

Valem para o produto escalar as propriedades dispostas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 - Propriedades do produto escalar entre dois vetores

Propriedade	Operação
Elemento nulo	$0.\vec{v} = 0$
Propriedade comutativa	$\vec{v}.\vec{w} = \vec{w}.\vec{v}$
Propriedade associativa	$k.(\vec{v}.\vec{w}) = (k.\vec{v}).\vec{w}$
Propriedade distributiva	$(\vec{v} + \vec{w}).\vec{u} = \vec{v}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{u}$
Quadrado do produto escalar	$\vec{v}.\vec{v} = \lvert\vec{v}\rvert^2$

d) Produto vetorial

O produto vetorial entre dois vetores é expresso pela Equação 2.4, resultando em um vetor (admite-se que tais vetores estejam definidos no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$).

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$
$$\vec{w} = w_x\hat{i} + w_y\hat{j} + w_z\hat{k}$$
$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

Na equação anterior, $|\bullet|$ simboliza a operação determinante de uma matriz, gerando como resultado da operação de produto vetorial um vetor perpendicular aos vetores operados. Valem para o produto vetorial as propriedades dispostas na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 - Propriedades do produto vetorial entre dois vetores

Propriedade	Operação
Produto vetorial inverso	$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$
Multiplicação de escalar por produto vetorial	$k.(\vec{v} \times \vec{w}) = (k.\vec{v}) \times \vec{w} + \vec{v} \times (k.\vec{w})$
Propriedade distributiva	$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u}$
Conversão em vetores com produtos escalares	$(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} = (\vec{v}.\vec{u}).\vec{w} - (\vec{v}.\vec{w}).\vec{u}$

O produto escalar e o módulo do produto vetorial entre dois vetores podem ainda ser expressos em função do ângulo θ formado entre tais vetores, como mostram as Equações 2.5 e 2.6.

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \\ \vec{w} &= w_x\hat{i} + w_y\hat{j} + w_z\hat{k} \\ \vec{v}.\vec{w} &= |\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \\ \vec{w} &= w_x\hat{i} + w_y\hat{j} + w_z\hat{k} \\ |\vec{v} \times \vec{w}| &= |\vec{v}||\vec{w}|\operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{2.6}$$

Uma operação interessante ainda no campo matemático dos vetores é o chamado produto misto, expresso pela Equação 2.7, que relaciona três vetores e uma diferente combinação de produtos entre eles. Tal operação é bastante utilizada quando da decomposição de vetores em distintas dimensões.

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \\ \vec{w} &= w_x\hat{i} + w_y\hat{j} + w_z\hat{k} \\ \vec{u} &= u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k} \\ (\vec{v} \times \vec{w}).\vec{u} &= \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.1.2 Operações com matrizes

Matrizes podem ser operadas matematicamente sob diversas situações:

a) Adição/subtração de matrizes

A adição/subtração de matrizes obedece à adição/subtração de seus componentes de mesmo índice.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33} \end{bmatrix}$$

b) Multiplicação de uma matriz por um escalar

A multiplicação de uma matriz por um escalar é similar à operação em escalares puros.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \alpha A \tag{2.9}$$

$$B = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{bmatrix}$$

c) Multiplicação entre duas matrizes

A multiplicação entre duas matrizes é bem definida sob a condição de que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz, ou seja, para que seja válido o produto entre duas matrizes *A* e *B*, é necessário que possuam respectivamente dimensões $m \times n$ e $n \times p$, tendo a matriz resultante

do produto dimensões $m \times p$. Sob tais condições, cada elemento da matriz produto $C = AB$ é dado por:

$$c_{i,j} = a_{i,1}.b_{1,j} + a_{i,2}.b_{2,j} + ... + a_{i,n}.b_{n,j} \tag{2.10}$$

Exercício resolvido

1) Determine o produto entre as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solução

A matriz produto possui 2 linhas e uma coluna:

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1.4 + 1.0 + 2.(-1) \\ 3.4 + 4.0 + 1.(-1) \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

O resultado obedece, assim, às dimensões esperadas para o resultado da operação produto entre matrizes.

2.1.3 Matrizes especiais

Algumas matrizes recebem denominações especiais, visando a facilitar algumas operações nesse conjunto de entidades matemáticas.

a) Matriz identidade

A matriz identidade I_n é a matriz quadrada de dimensões $n \times n$ em que a diagonal principal é formada por algarismos 1 e os demais elementos são nulos.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

b) Matriz transposta

Define-se matriz transposta de uma matriz conhecida M àquela obtida da inversão linha/coluna de seus elementos $m_{i,j}$, tal que:

$$m^T_{i,j} = m_{j,i}.$$

Importante observar que $(A.B.C.D....Z)^T = Z^T....C^T.B^T.A^T$.

Exercício resolvido

2) Determine a matriz transposta de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução

$$A^T_{i,j} = A_{j,i} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Matriz simétrica

Define-se matriz simétrica de uma matriz *M* aquela que é igual à transposta de *M*. Tem-se como condição necessária para tal que *M* seja quadrada. A matriz simétrica é útil na determinação reversa de respostas a partir de matrizes representativas de sistemas.

d) Matriz inversa

Define-se matriz inversa M^{-1} de uma matriz quadrada M aquela tal que $M.M^{-1} = M^{-1}.M = I$. A condição necessária e suficiente para que uma matriz quadrada M seja inversível é que $\det(M) \neq 0$.

Exercício resolvido

3) Verifique se a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ possui inversa.

Solução

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 12 + 0 - (-8 + 4 + 0) = 11 - (-4) = 15 \neq 0$$

A Tabela 2.3 sumariza propriedades das matrizes quanto à sua classificação.

Tabela 2.3 - Propriedades das matrizes quanto à sua classificação

Tipo de matriz	É quadrada?	É inversível?	Qual sua transposta?
Matriz identidade I_n	Sim	Sim, ela própria	Ela própria
Matriz inversa A^{-1}	Sim	Sim, a matriz A	$(A^{-1})^T$
Matriz simétrica B	Sim	Não necessariamente	$B^T = B$
Matriz transposta C^T	Não necessariamente	Não necessariamente	C

2.2 Autovalores e autovetores

Considere-se uma transformação linear de um vetor em outro, $T : V \rightarrow W$, tal que

$$T(v) = \lambda v\,, \qquad (2.12)$$

em que λ é um escalar dito autovalor e *v* é dito autovetor, se $v \geq 0$. Uma vez que uma transformação linear pode ser escrita pelo produto de uma matriz por um vetor, pode-se escrever:

$$T(v) = Av\,. \qquad (2.13)$$

Estabelecendo-se igualdade entre as equações anteriores, pode-se escrever:

$$(A - \lambda I)v = 0\,, \qquad (2.14)$$

onde *A* é uma matriz quadrada. Os vetores $v \geq 0$ para os quais há um valor de λ que seja solução da Equação 2.14 são denominados autovetores da matriz *A*, e λ são denominados autovalores associados àqueles autovetores. Para que isso seja possível, é condição que $\det(A - \lambda I) = 0$, o que gera um

polinômio de n-ésimo grau denominado polinômio característico (a ser abordado no próximo capítulo), cujas raízes são exatamente os autovalores da matriz A.

Exercício resolvido

4) Obtenha os autovalores associados à transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, expressa por $(x, y) \mapsto (4x + 5y, 2x + y)$.

Solução

A obtenção de autovalores segue o exposto na teoria supracitada:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \therefore \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(1-\lambda) - 10 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 6 \end{cases}$$

Vamos recapitular?

Foram apresentados neste capítulo conceitos fundamentais em álgebra linear, considerados relevantes às técnicas de controle a serem descritas nos próximos capítulos.

O capítulo abordou, entre outros elementos, os conceitos e propriedades de vetores e matrizes, enunciando também a definição de autovetores e autovalores, úteis em determinadas técnicas de ajuste de sinais de saída provenientes de sistemas lineares.

Agora é com você!

1) Obtenha os produtos vetorial e escalar entre os vetores $\vec{v} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ e $\vec{w} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$.

2) Qual a matriz inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$?

   O que se pode observar a respeito de tal matriz?

3) Obtenha os autovalores associados à transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, expressa por $(x, y) \mapsto (3x + y, 2x - y)$.

4) Pesquise sobre matrizes adjuntas e obtenha sua relação com o cálculo da matriz inversa de uma matriz qualquer.

3

Sinais e Sistemas Lineares

Para começar

Este capítulo tem por objetivo apresentar os conceitos de sinais e sistemas lineares, dentro do escopo da Teoria de Controle. O capítulo traz representações de sinais e sistemas em domínios distintos, abordando ainda a caracterização de sistemas em termos de raízes de suas funções de transferência e de sua estabilidade em regime permanente.

As informações contidas neste capítulo abrem as portas para a escolha adequada de que modalidade de projeto de sistema de controle melhor se encaixa como solução.

3.1 Conceitos básicos e propriedades

Como visto no Capítulo 1, um sinal é uma representação matemática de um fenômeno da natureza. Sob o ponto de vista da Teoria de Controle, são relevantes os sinais que alimentam sistemas lineares, no sentido de que a matemática envolvida é facilmente mapeada e desenvolvida por meio de ferramentas de cálculo diferencial e de álgebra linear, além de se dispor de um sem número de técnicas de matemática aplicada – caso das transformações de domínio –, assegurando uma caracterização completa de sinais e sistemas em termos de equações de fácil resolução.

Nesse sentido, alguns conceitos podem ser estabelecidos, a partir do conceito primário de sistema.

a) Sistema causal (ou não antecipativo)

   É todo sistema que responde somente a partir do instante em que é excitado por uma entrada, ou seja, depende de amostras de entrada atuais ou passadas, somente. Se $y(t, \tau)$

é a saída no instante t de um sistema excitado por um sinal de entrada aplicado no instante τ, isto significa que $y(t,\tau)=0$ para $t<\tau$.

Exercício resolvido

1) Verifique se o sistema descrito pela equação $y(t)=x(t)+2x(t+2)$ é causal.

Solução

Como a saída $y(t)$ é função de componentes de entrada que ocorrem em instantes de tempo futuros, a saída do sistema se antecipa à entrada, de modo que o sistema é não causal.

b) Sistema invariante no tempo

É todo sistema que possui parâmetros constantes, dependendo somente das variáveis de entrada, e jamais do tempo. Em outras palavras, se um sistema possui resposta $y(t)$ a um sinal de entrada $x(t)$, a aplicação de um sinal $x(t-\tau)$ conduzirá a uma saída $y(t-\tau)$.

Exemplo:

$$y(t)=x(t)+x(t-2) \Rightarrow \text{é invariante no tempo.}$$

$$y(t)=x(3t)+x(t-1) \Rightarrow \text{é variante no tempo.}$$

3.2 Representação no domínio do tempo

A representação de sinais e sistemas no domínio do tempo permite a análise sob o ponto de vista da operação de convolução entre sinais, para se calcular a saída de um sistema a uma dada entrada. Seja $x(t)$ um sinal arbitrário aplicado à entrada de um sistema linear e $h(t)$ a resposta de tal sistema a uma entrada impulsiva $\delta(t)$. O sinal de saída $y(t)$ para tais condições pode ser expresso por:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad (3.1)$$

A integral expressa na Equação 3.1 é dita *integral de convolução*, e por vezes é de difícil solução analítica, recorrendo-se assim (a) à solução gráfica (que foge do escopo deste livro), Figura 3.1, ou (b) à representação de sinais em um domínio alternativo transformado, como o da transformada de Laplace, expresso na próxima seção deste capítulo.

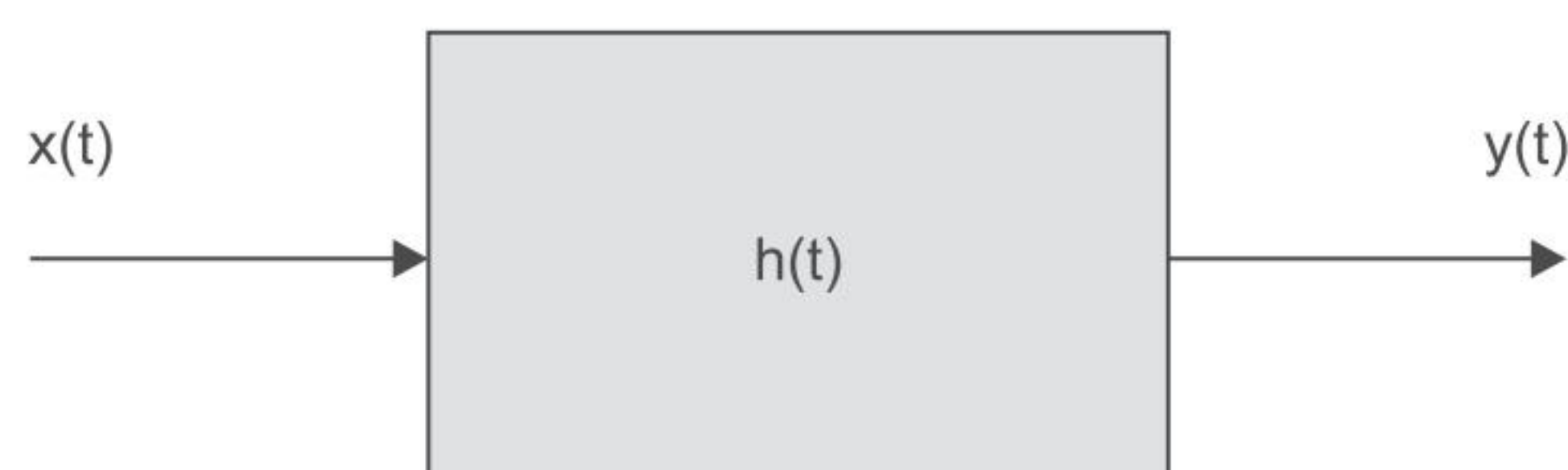



Figura 3.1 - Sistema linear caracterizado por sua resposta ao impulso $h(t)$.

3.3 Representação no domínio da frequência - a transformada de Laplace

A representação de sinais e sistemas lineares no domínio da transformada de Laplace assegura um modo simples e compacto de se avaliar tais entidades, possibilitando ainda que se possam analisar tais sistemas sob o enfoque de equações algébricas em vez de equações diferenciais, usuais na representação temporal.

De modo generalizado, a transformada de Laplace admite ainda o emprego de tabelas de pares de transformação direta e inversa e de propriedades (constantes dos Apêndices C e D desta obra), conduzindo a uma análise elegante e precisa, além de possuir uma forte associação da caracterização das respostas à posição das raízes das equações algébricas associadas aos sistemas.

A transformada de Laplace $X(s)$ de um sinal $x(t)$ é dada por

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt \tag{3.2}$$

Nesse sentido, sinais e equações de elaborada caracterização são facilmente transportados, no domínio da transformada de Laplace, para equações polinomiais em s. Merece destaque a definição da variável complexa $s = \sigma + j\omega$, que é nada mais que um caso generalizado da transformada de Fourier. O estudo da transformada de Fourier não se situa no escopo deste livro, mas é recomendado igualmente na análise de sinais, podendo constituir estudo complementar ao aluno.

Exercício resolvido

2) Determine a transformada de Laplace do sinal degrau unitário $x(t) = u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$.

Solução

O cálculo da transformada de Laplace obedece à fórmula de transformação, considerando que o sinal analisado, degrau unitário, não existe para instantes negativos de tempo. Assim:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$X(s) = \int_0^{\infty} 1.e^{-st}dt$$

$$X(s) = \frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty} = \frac{-1}{s}(e^{-\infty} - e^0)$$

$$X(s) = \frac{1}{s}$$

3.4 Caracterização de polos e zeros

Um modo imediato de se avaliar o comportamento de um sistema a uma dada entrada consiste em se analisar as raízes da transformada de Laplace de sua resposta a uma entrada impulsiva. Seja $H(s)$ a chamada função de transferência de um sistema, equivalente à transformada de Laplace da resposta ao impulso $h(t)$ desse sistema, e suponha-se que $H(s)$ é racional, na forma

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \ ,$$

em que as raízes dos polinômios do numerador e denominador são definidas, respectivamente, como zeros e polos. A localização das raízes do termo $D(s)$, ou seja, os polos do sistema, fala muito sobre o comportamento desse sistema quando sujeito a uma entrada arbitrária.

Genericamente, os polos de $H(s)$ são complexos, e a análise sobre a existência de partes real e imaginária desses polos permite que se conclua sobre a natureza da resposta do sistema. Antes de se tecerem conclusões acerca de tais características, o exemplo a seguir de cálculo de transformada de Laplace é bastante interessante para a análise aqui realizada, sendo fundamental ao entendimento apurado de controladores em outro domínio diferente do temporal.

Exercício resolvido

3) Determine a transformada de Laplace do sinal $x(t) = e^{-\alpha t}u(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$.

Solução

Tal como no exercício anterior, a transformada de Laplace do sinal analisado é dada por:

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}.e^{-st}dt$$

$$X(s) = \frac{-1}{s+\alpha}e^{-st}\bigg|_0^\infty = \frac{-1}{s+\alpha}(e^{-\infty} - e^0)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+\alpha}$$

Como observado no exemplo anterior, existe uma relação direta entre a posição de um polo α e sua resposta temporal correspondente $e^{-\alpha t}$. Desta maneira, fica nítido o comportamento de tal resposta, se convergente ou divergente, a partir da natureza do polo α. No caso de α complexo, a exponencial temporal se tornaria também complexa, o que induz a um comportamento senoidal, portanto oscilatório, da resposta.

A Tabela 3.1 mostra as características de resposta de um sistema a uma entrada em degrau unitário, de acordo com a característica dos polos de tal sistema (para efeito de polos variados, toma-se como predominante o polo mais à direita no plano complexo).

Tabela 3.1 - Propriedades da resposta de um sistema de acordo com a localização de seus polos

Parte real	Parte imaginária	Característica da resposta	Exemplo
Negativa	Nula	Converge, não oscila	$x(t) = e^{-2t}u(t)$
Negativa	Existe	Converge, oscila	$x(t) = e^{-(2-j)t}u(t)$
Positiva	Nula	Diverge, não oscila	$x(t) = e^{4t}u(t)$
Positiva	Existe	Diverge, oscila	$x(t) = e^{(4-j)t}u(t)$

3.5 Estabilidade de sistemas lineares

A condição de estabilidade de um sistema linear é provavelmente a mais importante a ser assegurada no comportamento de um sistema. Um sistema admite em sua resposta, sob certas condições, até mesmo um comportamento oscilatório, desde que convirja a determinado valor após algum intervalo aceitável de tempo. Todavia, um sistema monotonicamente instável jamais será desejável, conquanto haja especificações de regime permanente que devem ser atendidas. Essa talvez seja a maior finalidade de sistemas de controle: prover a sistemas teoricamente instáveis condições para que atinjam a condição de estabilidade.

O próximo capítulo versará sobre a estabilidade de sistemas lineares, especificamente para cada categoria de sistema estudado.

Amplie seus conhecimentos

Um exemplo clássico de sistema instável é o apresentado nas figuras a seguir. A primeira ponte sobre o estreito de Tacoma, em Puget Sound, Washington, mostrada na Figura 3.2, foi aberta ao tráfego em 1º de junho de 1940. Após algum tempo, percebeu-se que a ponte oscilava após ventanias. Cerca de quatro meses após sua inauguração, uma ventania produziu uma oscilação que cresceu em amplitude até a ruptura total da ponte, que pode ser vista na Figura 3.3. Este é um exemplo típico de sistema instável que, após a aplicação de uma entrada específica, se põe a oscilar até atingir valores divergentes do equilíbrio.

Autor desconhecido/Wikimedia Commons

Figura 3.2 - Tacoma Narrows Bridge antes da ruptura.

Autor desconhecido/Wikimedia Commons

Figura 3.3 - Tacoma Narrows Bridge após a ruptura.

Vamos recapitular?

Foram apresentados neste capítulo os conceitos de sinais e sistemas lineares, do ponto de vista de suas possíveis representações nos domínios do tempo e da transformada de Laplace, que é de caráter frequencial. Por meio do entendimento das raízes do sistema no domínio da frequência, é possível estimar o comportamento dos sinais de saída desses sistemas, quando sujeitos a sinais de entrada elementares.

O capítulo abordou, entre outros elementos, os conceitos de estabilidade e oscilação de sinais de saída, elencando-os à localização de polos e zeros no plano complexo.

Agora é com você!

1) Utilizando os pares de transformada de Laplace (Apêndice), determine a transformada de Laplace dos sinais $x(t) = e^{-3t}u(t)$, $x(t) = \cos(2t)u(t)$ e $x(t) = t^5u(t)$.

2) Identifique os zeros e polos da função de transferência $H(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+6s+8}$.
Tal sistema é estável ou instável? Oscilatório ou não? Justifique sua resposta.

3) Explique com suas palavras o fenômeno da instabilidade observado em um carro que desce sem freios uma ladeira com 45º de inclinação.

4

Sistemas de Primeira e Segunda Ordens

Para começar

Este capítulo tem por objetivo apresentar sistemas lineares de primeira e segunda ordens, considerados os mais comuns e relevantes como modelos no estudo de fenômenos realísticos modelados matematicamente.

As informações contidas neste capítulo constituem uma importante base para a compreensão aprofundada de técnicas de projeto de sistemas de controle, abordadas a partir do próximo capítulo.

4.1 Estabilidade de sistemas de primeira e segunda ordens

A estabilidade de sistemas remete a um grande número de problemas em que é preciso manter constante uma dada variável de saída. Em alguns casos, é desejável um transitório acelerado, ao passo que em outros casos é preciso minimizar o erro de regime permanente. Nesses casos, o projetista deve saber projetar adequadamente os filtros de controle do sistema. O primeiro passo, no entanto, é saber especificar matematicamente os índices de desempenho desejados para a resposta.

Nesse contexto, a estabilidade de sistemas de primeira ordem é de simples compreensão, pois esses sistemas apresentam diversos polos que invariavelmente produzem respostas exponenciais

oscilatórias ou não. A forma de uma função de transferência composta de termos em primeiro grau é dada por:

$$H(s) = \frac{k}{s + \alpha} \tag{4.1}$$

Sob tais condições, a saída será composta de uma função exponencial, convergente ou não, a depender da polaridade do sinal da parte real de cada polo.

Para sistemas de segunda ordem, a análise é mais complexa. Usualmente, um sistema de segunda ordem é representado por:

$$H(s) = \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2} \tag{4.2}$$

A condição de estabilidade de um sistema linear é, provavelmente, a mais importante a ser assegurada no comportamento de um sistema. Um sistema admite em sua resposta, sob certas condições, até mesmo um comportamento oscilatório, desde que convirja a determinado valor após algum intervalo aceitável de tempo.

Todavia, um sistema monotonicamente instável jamais será desejável, conquanto haja especificações de regime permanente que devem ser atendidas. Essa talvez seja a maior finalidade de sistemas de controle: prover a sistemas teoricamente instáveis condições para que atinjam a condição de estabilidade.

4.2 Especificações de desempenho

São relevantes na observação da resposta de um sistema de segunda ordem alguns parâmetros de projeto, a partir do polinômio característico do sistema (denominador da expressão na Equação 4.2):

» Tempo de subida t_r (*rising time*): intervalo de tempo que a resposta leva entre cruzar pela primeira vez um determinado limite inferior e a primeira vez que cruza um determinado limite superior. Estes limites são definidos em função de uma porcentagem do valor final (por exemplo, 10 – 90%, 5 – 95% e 0 – 100%).

» Tempo de pico t_p (*peak time*): tempo necessário para a resposta atingir seu valor máximo, ou seja, seu sobressinal. É modelado por:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

» Sobressinal SS (*overshoot*): máximo valor de pico da curva de resposta medido a partir do valor unitário. É modelado por:

$$SS = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi}$$

» Tempo de acomodação ou tempo de assentamento t_s: tempo necessário para a curva de resposta alcançar e permanecer dentro de uma faixa em torno do valor final *VF*, de magnitude especificada por uma porcentagem absoluta daquele valor final (por exemplo, 95% ou 98%). O tempo de acomodação é modelado por:

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \text{ (critério de 95\% da resposta final)}$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \text{ (critério de 98\% da resposta final)}$$

As especificações de desempenho de um sistema linear podem ser caracterizadas graficamente, como vemos na Figura 4.1:

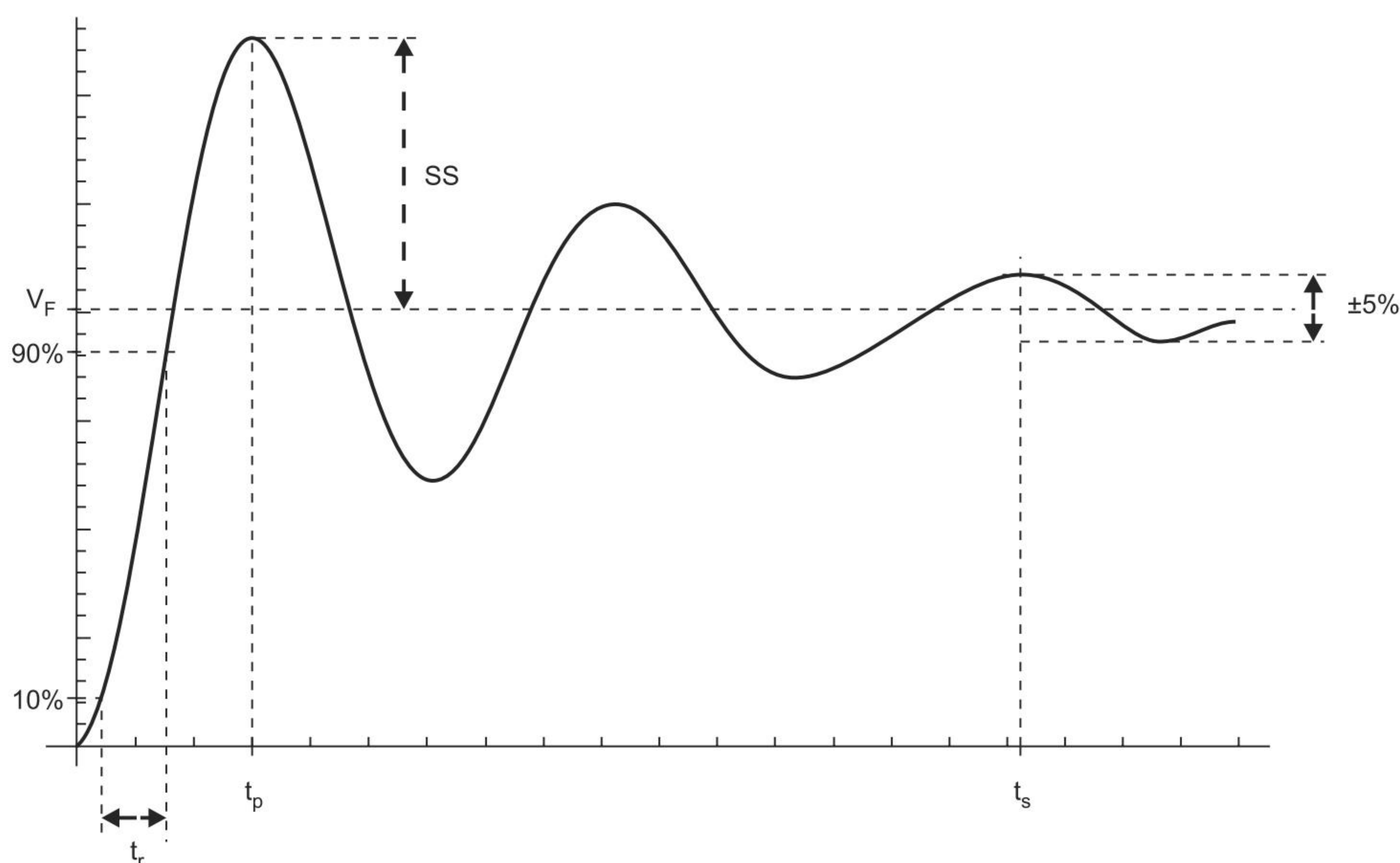



Figura 4.1 - Caracterização das especificações de desempenho de um sistema linear - resposta ao degrau unitário.

A partir de tais requisitos, o projetista pode analisar qual a melhor estratégia de controle, de maneira a privilegiar um ou outro. Será visto nos capítulos posteriores que a escolha por mais velocidade de resposta ou por menos sobressinal influi diretamente no modelo de controlador selecionado.

Um problema de controle se concentra, assim, em determinar um modo de se alterar um sistema físico conhecido, a fim de atender às especificações de desempenho desejadas. Como o sistema físico é usualmente imutável, a solução consiste em se projetar controladores que, associados ao sistema, possibilitem que os requisitos desejados sejam obtidos. A escolha adequada do controlador a ser utilizado admite, assim, diferentes possibilidades de solução, e a melhor é aquela mais adequada à necessidade de projeto.

Exercício Resolvido

1) Para o sistema dado por $H(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+4s+13}$, determine:

seus polos, seu tempo de pico, seu sobressinal percentual e seu tempo de acomodação.

Solução

A obtenção das raízes do polinômio característico é obtida por meio da resolução da equação de segundo grau associada:

$$s^2+4s+13=0 \left\langle \begin{array}{l} s' = -2+j3 \\ s'' = -2-j3 \end{array} \right.$$

Do polinômio característico obtém-se $\omega_n = 3{,}605$ *rad/s* e $\zeta = 0{,}555$.

O tempo de pico é calculado como:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{13}\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2}} = 1{,}047\,s$$

O sobressinal é calculado como:

$$SS = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} = 0{,}234$$

O tempo de acomodação é calculado como:

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 1{,}5\,s$$

4.3 Sistemas de primeira ordem

A função de transferência de um sistema de primeira ordem, como enunciado na Equação 4.1, é dada por

$$H(s) = \frac{k}{s+\alpha}, \tag{4.3}$$

o que conduz à resposta ao impulso

$$h(t) = k.e^{-\alpha t}u(t), \tag{4.4}$$

o que requer $\alpha > 0$ para que o sistema seja estável. O termo $\tau = 1/\alpha$ é usualmente denominado *constante de tempo* do sistema. Deste modo, pode-se reescrever:

$$H(s) = \frac{k}{s + 1/\tau} = \frac{k\tau}{\tau s + 1} \tag{4.5}$$

que corresponde à equação diferencial

$$\tau \frac{dy}{dt} + \alpha y(t) = kx(t). \tag{4.6}$$

A Figura 4.2 mostra a resposta de um sistema de primeira ordem ao impulso.

A resposta de um sistema linear invariante no tempo de primeira ordem ao degrau unitário u(t) é dada por:

$$s(t) = (1 - e^{-\alpha t})u(t). \tag{4.7}$$

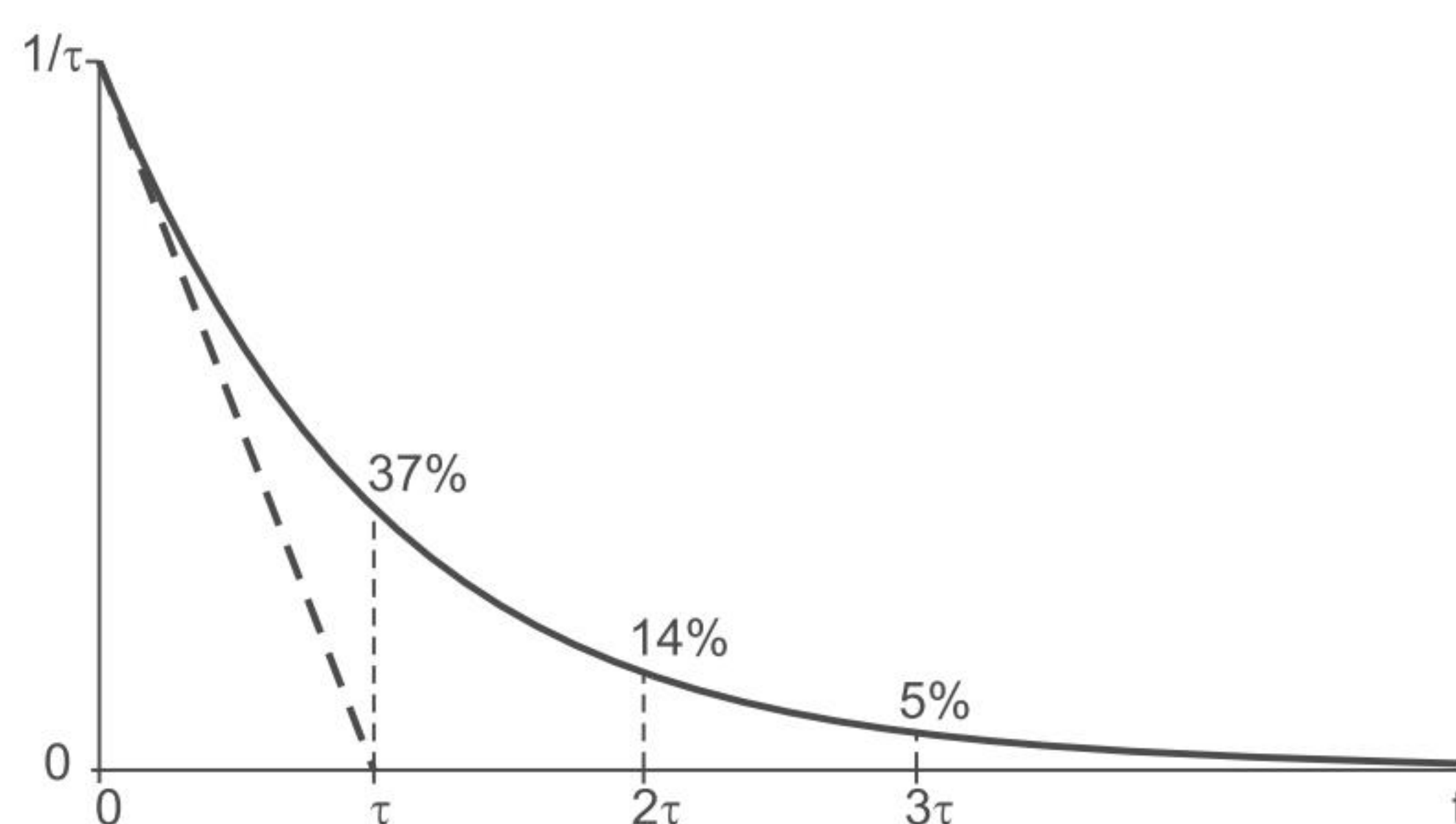



Figura 4.2 - Resposta ao impulso de um sistema de primeira ordem.

A Figura 4.3 mostra a resposta de um sistema de primeira ordem ao degrau.

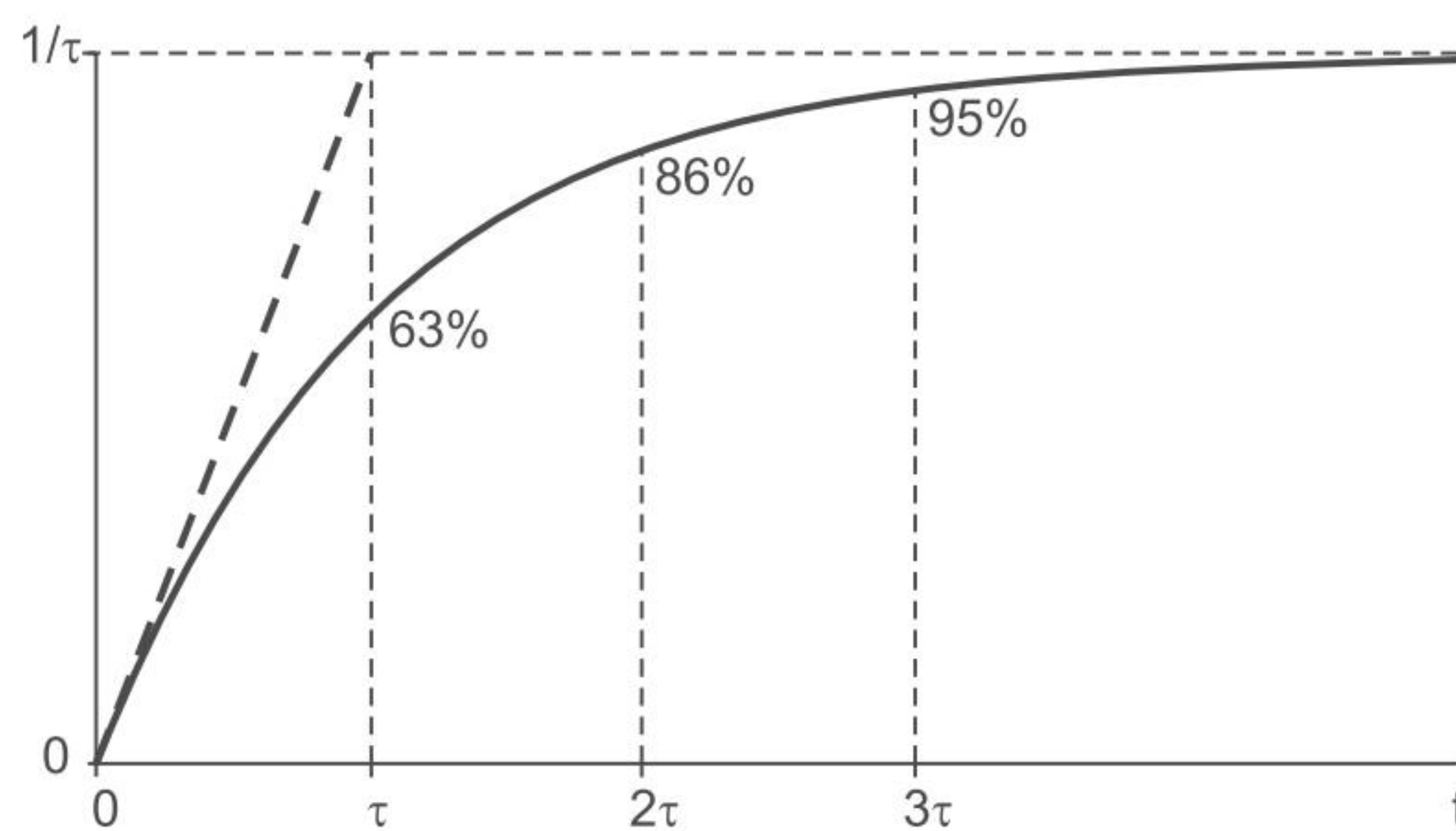



Figura 4.3 - Resposta ao degrau de um sistema de primeira ordem.

Há de se avaliar como parâmetros relevantes na resposta de sistemas de primeira ordem os seguintes:

» Tempo de subida:

$$t_r(10-90\%) \approx 2,2\tau$$

$$t_r(5-95\%) \approx 2,95\tau$$

» Tempo de estabilização:

$$t_s(5\%) \approx 3\tau$$

Quanto ao tempo de subida, é infinito, já que a resposta nunca ultrapassa o valor final antes do infinito. Uma maior constante de tempo conduzirá a um maior intervalo de tempo até que o sistema se estabilize, condição em que o polo se situa cada vez mais próximo do eixo imaginário.

4.4 Sistemas de segunda ordem

Como visto anteriormente, um sistema de segunda ordem é representado por:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \tag{4.8}$$

em que ζ é o chamado fator de amortecimento do sistema e ω_n é a chamada frequência natural do sistema.

A Figura 4.4 mostra a localização de polos complexos conjugados de um sistema de segunda ordem, no plano complexo. Os polos indicados na figura são $-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, ou, em forma compacta, $-1/\tau_n \pm j\omega_a$, onde $\tau_n = -1/\zeta\omega_n$ e $\omega_a = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$.

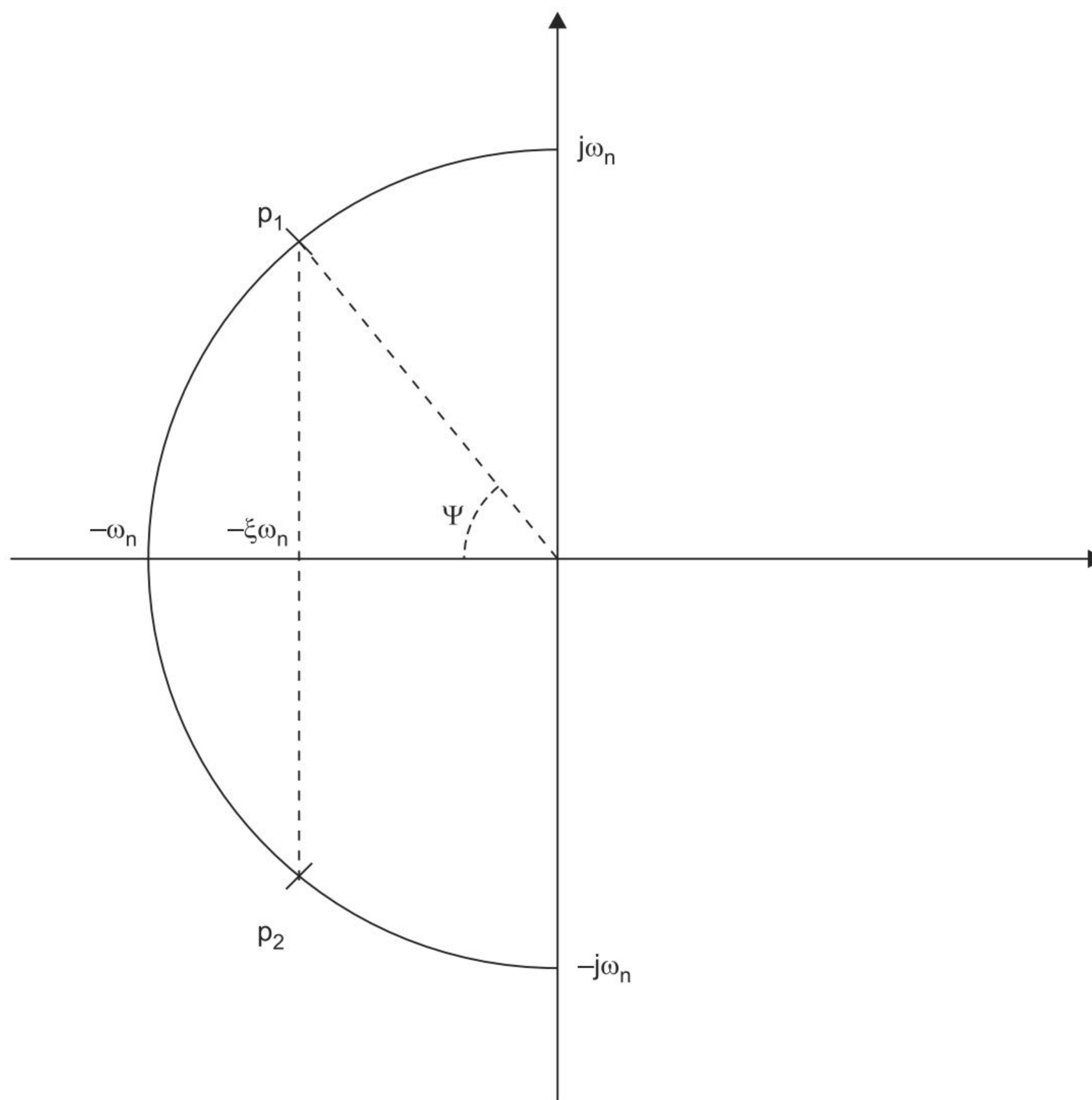



Figura 4.4 - Resposta ao degrau de um sistema de primeira ordem.

Pode-se classificar um sistema de acordo com o valor de seu fator de amortecimento, como visto nas subseções a seguir.

4.4.1 Sistemas subamortecidos: $0 < \zeta < 1$

Sistemas de segunda ordem subamortecidos, quando sujeitos a entradas impulsivas, apresentam como resposta:

$$h(t) = (A_1 e^{-t/\tau_n} e^{j\omega_a t} + A_2 e^{-t/\tau_n} e^{-j\omega_a t})u(t) \tag{4.9}$$

A Figura 4.5 mostra diferentes respostas de tais sistemas ao impulso, em função de diferentes valores de fator de amortecimento, para uma mesma frequência natural. Considera-se na ilustração, além do caso de subamortecimento, o caso crítico de amortecimento ($\zeta = 1$).

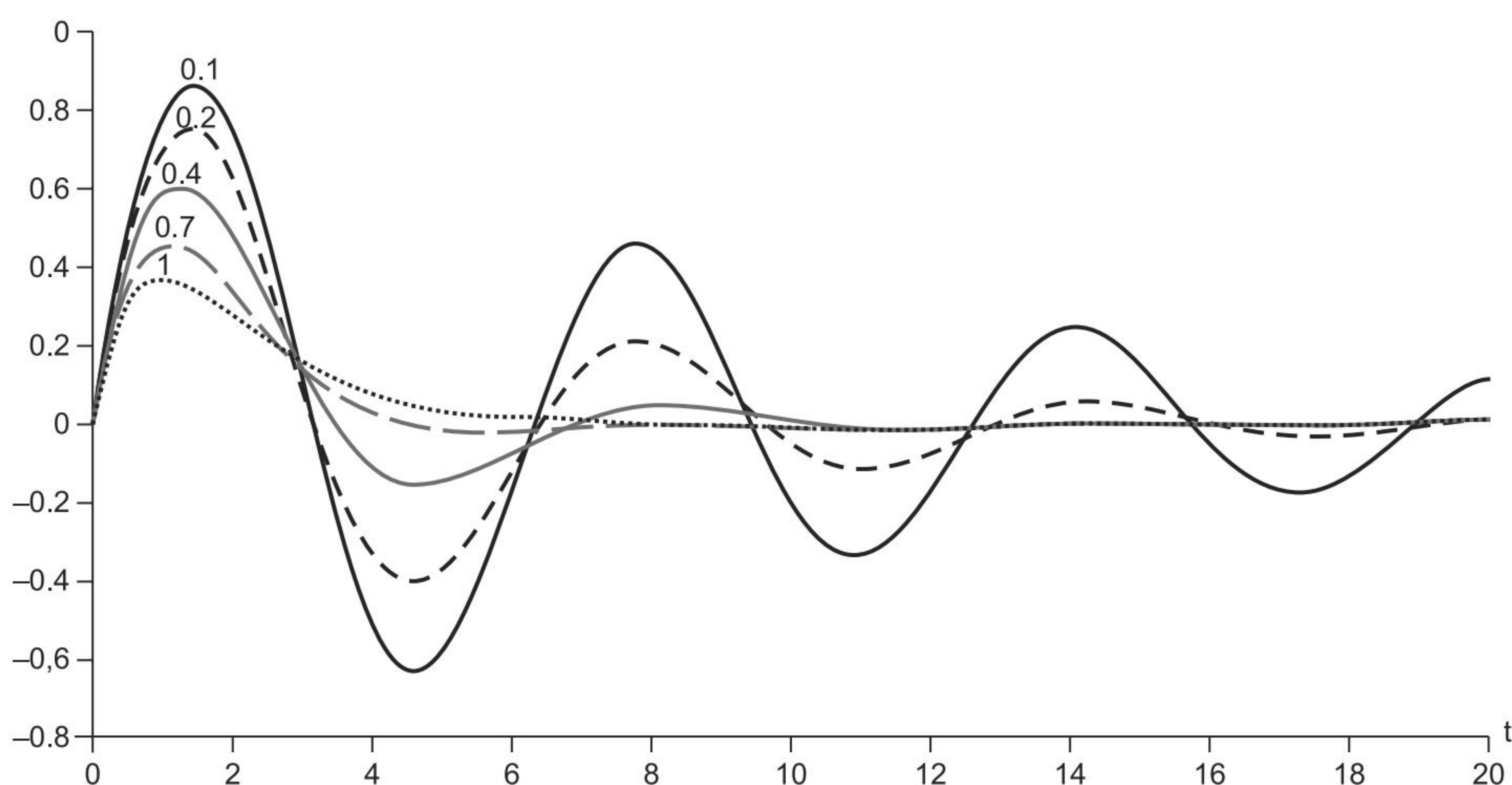



Figura 4.5 - Resposta ao impulso de um sistema subamortecido de segunda ordem. Os valores de fator de amortecimento estão indicados nas curvas, considerando uma mesma frequência natural.

Uma análise rápida de tal resposta mostra que oscilações somente acontecem em decorrência do segundo termo exponencial, ao passo que o primeiro termo exponencial induz a resposta ao amortecimento da amplitude da resposta.

Os mesmos sistemas, sujeitos a entradas do tipo degrau unitário, apresentam como resposta (obtida da integração de $h(t)$):

$$s(t) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-t/\tau_n} \operatorname{sen}(\omega_a t + \varphi)\right] u(t) \tag{4.10}$$

A Figura 4.6 mostra diferentes respostas de tais sistemas ao degrau, em função de diferentes valores de fator de amortecimento, para uma mesma frequência natural. Considera-se na ilustração, além do caso de subamortecimento, o caso crítico de amortecimento ($\zeta = 1$).

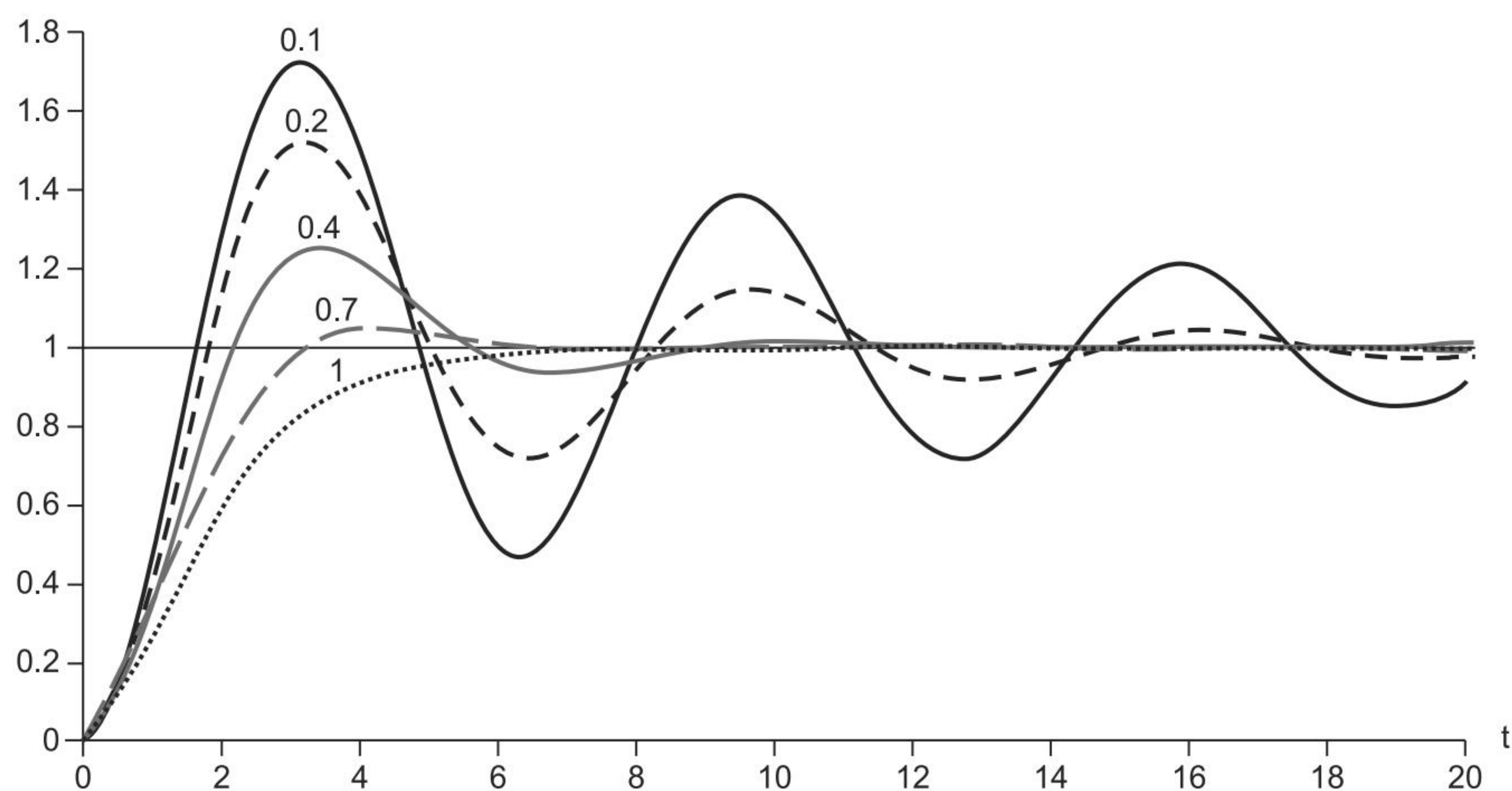



Figura 4.6 - Resposta ao degrau de um sistema subamortecido de segunda ordem. Os valores de fator de amortecimento estão indicados nas curvas, considerando uma mesma frequência natural.

4.4.2 Sistema sobreamortecido: $\zeta > 1$

Sistemas de segunda ordem sobreamortecidos, quando sujeitos a entradas impulsivas, apresentam como resposta:

$$h(t) = M(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})u(t), \tag{4.11}$$

$$\text{com } M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}.$$

A Figura 4.7 mostra diferentes respostas de tais sistemas ao degrau em função de diferentes valores de fator de amortecimento, para $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$.

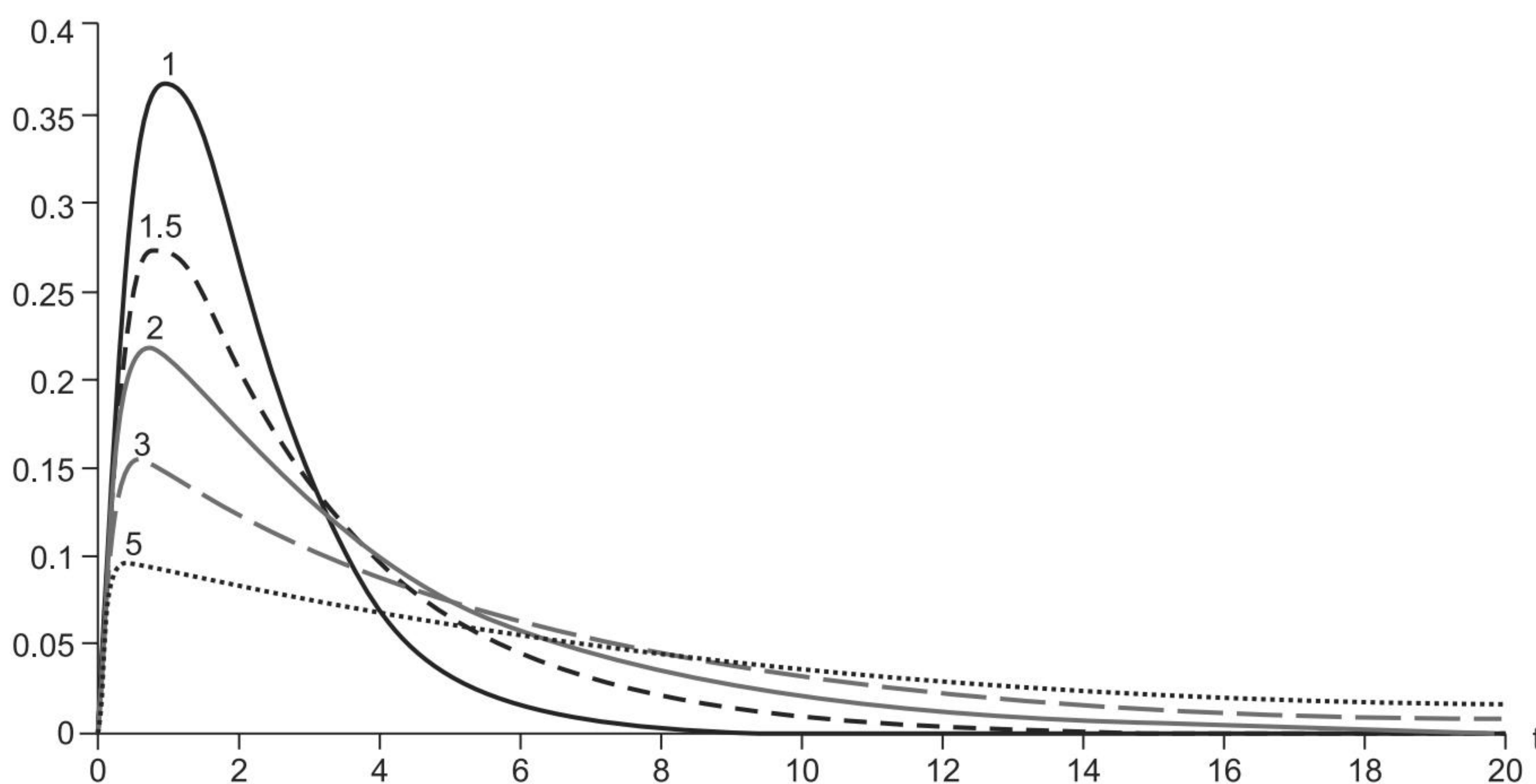



Figura 4.7 - Resposta ao impulso de um sistema sobreamortecido de segunda ordem. Os valores de fator de amortecimento estão indicados nas curvas, considerando frequência natural unitária.

Os mesmos sistemas, sujeitos a entradas do tipo degrau unitário, apresentam como resposta (também obtida da integração de h(t)):

$$s(t) = \left[1 + \frac{M}{p_1} e^{p_1 t} - \frac{M}{p_2} e^{p_2 t} \right] u(t) \tag{4.12}$$

A Figura 4.8 ilustra o comportamento desta resposta para frequência natural unitária, para distintos valores de fator de amortecimento, incluindo o caso de amortecimento crítico. Como observado, a resposta é sempre crescente, tendendo assintoticamente para o *setpoint*, sem oscilações. Tal como no caso de subamortecimento, a frequência natural aparece somente como um fator de escala no domínio do tempo (eixo horizontal). Fica também evidente que a primeira exponencial é dominante em relação à segunda, aproximando-se do caso de um sistema de primeira ordem com polo p_1, de modo mais nítido na resposta ao degrau do que na resposta ao impulso, pelo fato de que ocorre um escalonamento da amplitude da segunda exponencial por p_2, maior em módulo do que p_2. Obviamente, o sobressinal da resposta ao degrau para sistemas sobreamortecidos é nulo, pois a resposta nunca ultrapassa o valor máximo. Já aproximações para os tempos de subida e de estabilização podem ser facilmente obtidas na condição de que $\zeta >> 1$, mantêm-se as expressões:

» Tempo de subida

$$t_r(10-90\%) \approx 2,2\tau$$
$$t_r(5-95\%) \approx 2,95\tau$$

» Tempo de estabilização

$$t_s(5\%) \approx 3\tau$$

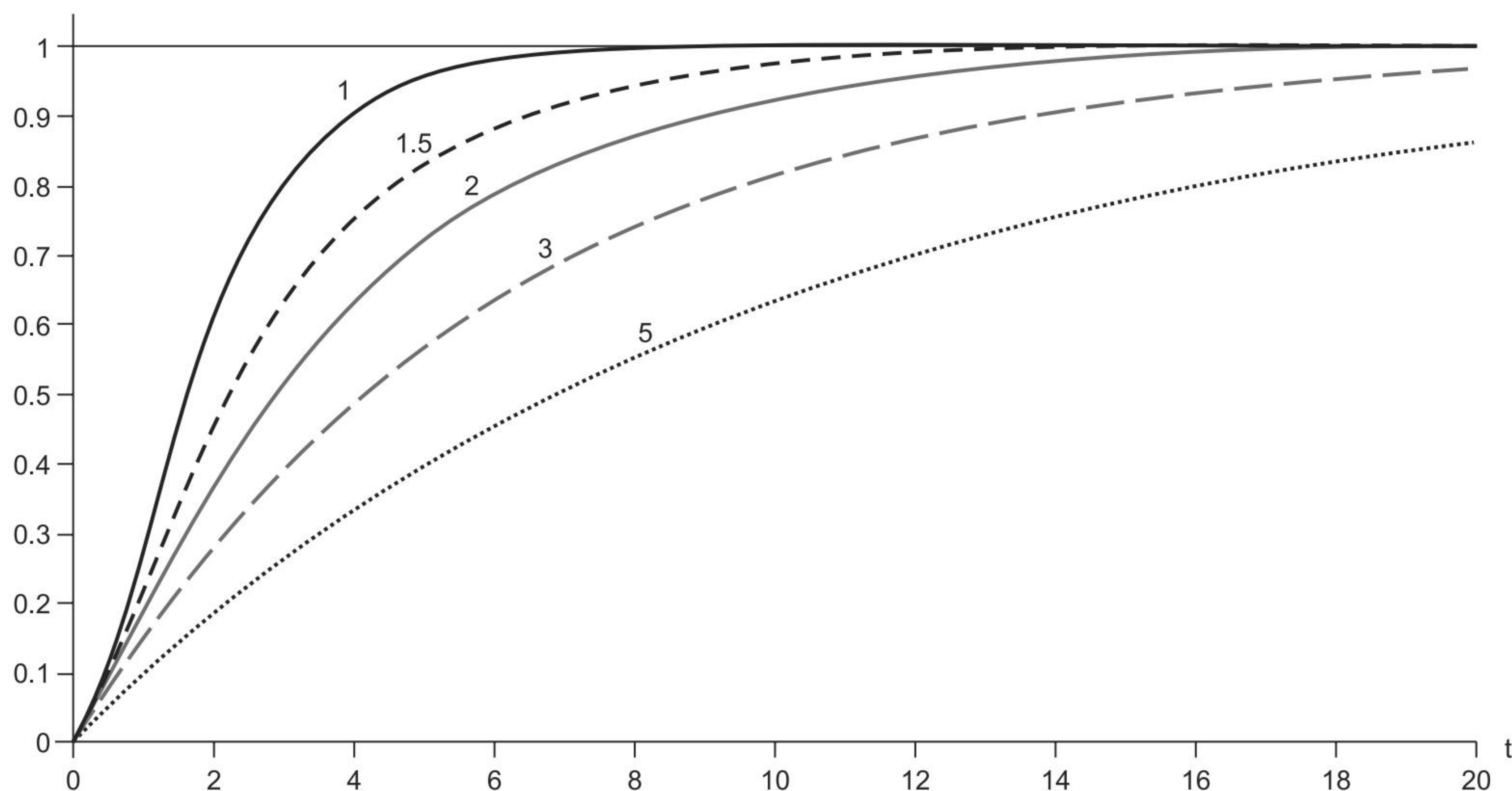



Figura 4.8 - Resposta ao degrau de um sistema sobreamortecido de segunda ordem. Os valores de fator de amortecimento estão indicados nas curvas, considerando frequência natural unitária.

4.4.3 Sistemas criticamente amortecidos: $\zeta = 1$

Para $\zeta = 1$, o polinômio característico apresentado na Equação 4.2 possui um polo duplo em $-\omega_n$, e a resposta ao impulso se torna:

$$h(t) = \omega_n{}^2 t.e^{-\omega_n t}u(t). \qquad (4.13)$$

Tal resposta, mostrada nas Figuras 4.5 e 4.7, não apresenta oscilação, apresentando somente um período inicial de subida, seguido por uma descida assintótica que tende a zero.

A resposta de um sistema criticamente amortecido ao degrau é dada por:

$$s(t) = [1-(1+\omega_n t).e^{-\omega_n t}]u(t) \qquad (4.14)$$

Tal resposta, ilustrada nas Figuras 4.6 e 4.8, corresponde a uma função crescente que tende assintoticamente ao valor unitário.

Mais uma vez, o sobressinal da resposta ao degrau para sistemas criticamente amortecidos é nulo, pois a resposta nunca ultrapassa o valor máximo. Aproximações para os tempos de subida e de estabilização podem ser facilmente obtidas:

» Tempo de subida

$$t_r(10-90\%) \approx 3,4\tau$$
$$t_r(5-95\%) \approx 4,4\tau$$

» Tempo de estabilização

$$t_s(5\%) \approx 4,8\tau$$

4.5 Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz constitui um método algébrico destinado a fornecer informações sobre a estabilidade absoluta de um sistema linear invariante no tempo que possui um polinômio característico com coeficientes constantes. Tal critério avalia a possibilidade de uma das raízes desse polinômio se situar no semiplano lateral direito do plano complexo, ou seja, que possua parte real positiva, infringindo assim a condição primeira de estabilidade.

O critério consiste na construção de uma tabela que estabelece uma condição necessária e suficiente de estabilidade, baseada em um arranjo triangular. Na tabela em questão, garante-se a estabilidade de um sistema se todos os elementos da primeira coluna do arranjo considerado forem positivos. Os passos do critério são descritos a seguir.

a) Seja o polinômio característico:

$$H(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0$$

Amplie seus conhecimentos

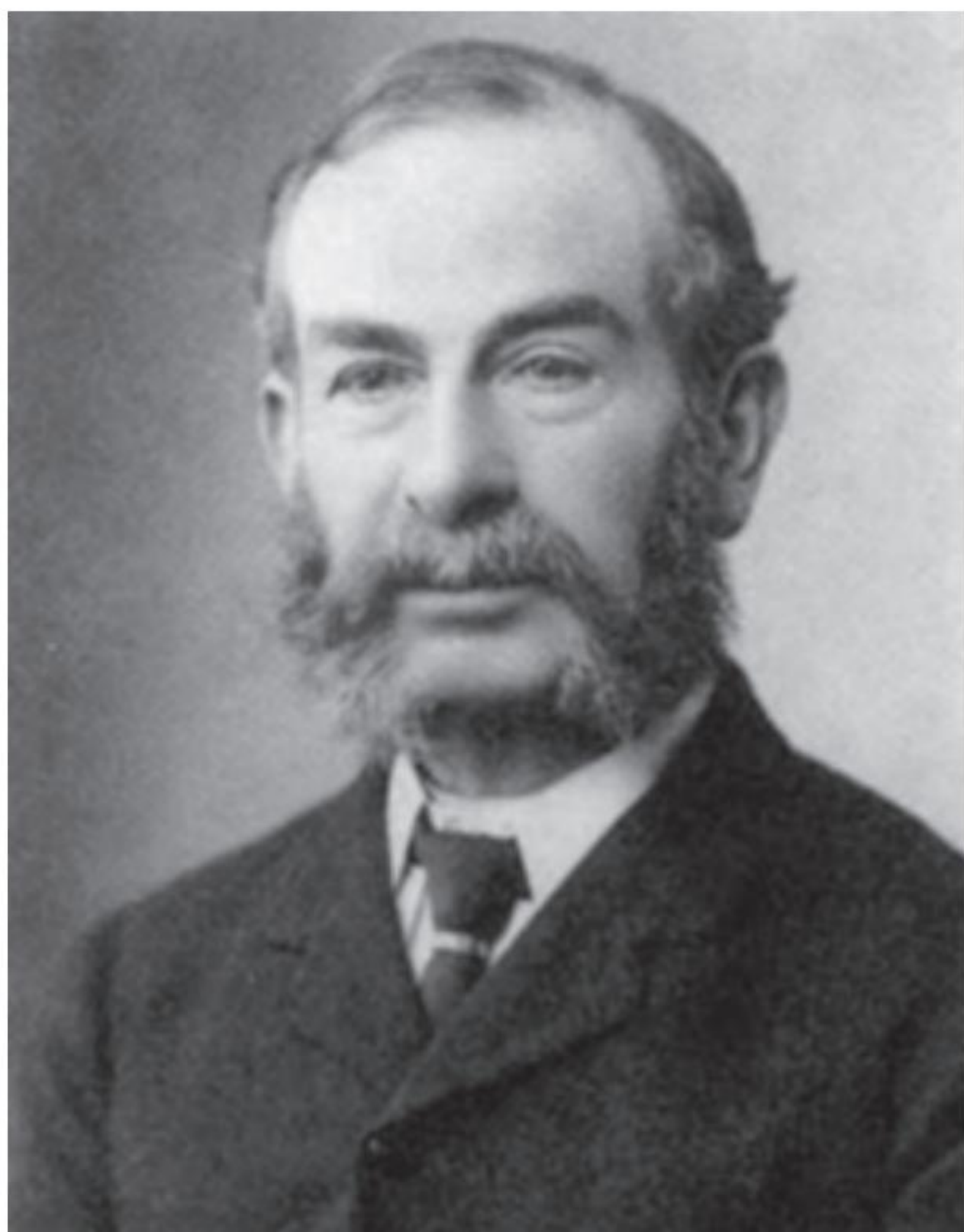
O critério de Routh-Hurwitz tem uma origem interessante. O algoritmo foi sugerido pelo matemático inglês Edward John Routh, Figura 4.9a, em 1876, com o nome de Teste de Routh, prestando-se a determinar se todas as raízes do polinômio característico de um sistema linear possuem parte real negativa. De modo independente, o matemático alemão Adolf Hurwitz, Figura 4.9b, propôs, em 1895, uma tabela de disposição dos coeficientes do polinômio característico em uma matriz quadrada chamada matriz de Hurwitz, mostrando que o polinômio é estável se e somente se a sequência de determinantes de suas submatrizes for positiva.

Autor desconhecido/Wikimedia Commons

Figura 4.9a - Edward John Routh.

Autor desconhecido/Wikimedia Common

Figura 4.9b - Adolf Hurwitz.

Os dois algoritmos são absolutamente equivalentes, sendo o teste um modo elegante de se calcular os determinantes de Hurwitz. Um polinômio que satisfaça às condições de Routh-Hurwitz é, assim, chamado de *polinômio de Hurwitz*.

b) Tomam-se os coeficientes de H(s), preenchendo-se a tabela que segue.

$$\begin{matrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

c) Os elementos b_i e c_i são calculados de acordo com:

$$b_i = \frac{a_{n-1}.a_{n-2i} - a_n.a_{n-2i-1}}{a_{n-1}}$$

$$c_i = \frac{b_1.a_{n-2i-1} - a_{n-1}.b_{i+1}}{b_1}$$

d) Completada a tabela, o número de mudanças de sinal na primeira coluna será o número de polos não negativos.

O critério de Routh-Hurwitz é, assim, uma técnica eficiente no sentido de que permite a identificação da estabilidade de um sistema sem o conhecimento exato da localização dos polos.

Exercício resolvido

2) Considerando-se o sistema com polinômio característico $H(s) = s^5 + 4s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 3s + 6$, verifique sua estabilidade utilizando o critério de Routh-Hurwitz.

Solução

Monta-se a tabela de Routh conforme a seguir.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -3 & 6 & & \\ 3 & & & \\ 6 & & & \end{array}$$

Uma vez que há duas mudanças de sinal na primeira coluna, o sistema possui duas raízes no semiplano lateral direito, no plano complexo, o que indica instabilidade. De fato, o sistema em malha fechada do exemplo possui raízes em $s = -3,7492$, $s = -0,6234 \pm 0,9054$, $0,5205 \pm 1,0188$, de modo que o último par de raízes, à direita do eixo imaginário, conduz o sistema à instabilidade.

A maior vantagem do critério de Routh-Hurwitz é ser bastante funcional no projeto de controladores, já que a obtenção direta de valores que garantem a estabilidade não é trivial com o uso de cálculos simples.

Exercício resolvido

3) Considerando-se o sistema com ganho em malha aberta igual a:

$$G(s) = \frac{1000}{(s+2)(s+3)(s+5)}$$

e realimentação com ganho unitário, verifique sua estabilidade utilizando o critério de Routh-Hurwitz.

Solução

O sistema em malha fechada pode ser obtido como

$$H_{MF}(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\dfrac{1000}{(s+2)(s+3)(s+5)}}{1+\dfrac{1000}{(s+2)(s+3)(s+5)}}=\frac{1000}{s^3+10s^2+31s+1030}.$$

A tabela de Routh é, assim:

1	31	0
10	1030	0
–72	0	0
103	0	0

Uma vez que há duas mudanças de sinal na primeira coluna, o sistema possui duas raízes no semiplano lateral direito, no plano complexo, o que indica instabilidade.

4.6 Análise dos resultados

Agora que você já aprendeu um pouco mais sobre os sistemas de primeira e segunda ordem, algumas considerações podem ser levantadas. Em primeiro lugar, deve-se reforçar o fato de que, em sistemas de primeira ordem, quanto mais próximos os polos se situam do eixo imaginário, mais lentamente o sistema se estabiliza. Isto é reforçado no caso de sistemas subamortecidos, em que o tempo de estabilização é função da parte real dos polos do sistema.

No que diz respeito a sistemas sobreamortecidos, a velocidade de estabilização depende unicamente do polo mais próximo do eixo imaginário (dito polo dominante), sendo tanto mais lenta quanto mais próximo for esse polo do referido eixo.

Outra conclusão relevante acerca dos sistemas apresentados é a de que sistemas com amortecimento crítico são os mais velozes em termos de convergência, posto que o polo mais próximo do eixo imaginário é o mais distante deste eixo, comparativamente aos outros tipos de sistemas. Isso é importante no projeto de sistemas mecânicos que necessitem de rápida estabilização, como sistemas que exijam rigidez mecânica (por exemplo, instrumentos de medição com pouca inércia).

É possível também verificar que, em sistemas sobreamortecidos, polos mais próximos do eixo imaginário são considerados dominantes em termos de velocidade de resposta ao degrau unitário. Isso é também nítido quando se observam as respostas.

Vamos recapitular?

Foram apresentados neste capítulo conceitos de estabilidade de sistemas lineares de primeira e segunda ordens, em termos de parâmetros considerados relevantes ao estudo das especificações requeridas para sistemas de controle.

O capítulo abordou, entre outros elementos, os conceitos de tempo de subida, tempo de pico, tempo de estabilização e sobressinal, que constituem elementos caracterizantes de sistemas lineares quando sujeitos a entradas impulsivas e do tipo degrau. Analisou-se também um critério de verificação de estabilidade de sistemas, o critério de Routh-Hurwitz, que dispensa para tal o conhecimento exato da localização dos polos do sistema em análise.

Agora é com você!

1) Avalie a estabilidade dos sistemas representados pelas funções de transferência abaixo:

$$H(s) = \frac{3}{s^2 + 5s + 16}$$

$$H(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 10}$$

$$H(s) = \frac{3}{s^2 + 1,8s + 2,2}$$

2) Determine para o sistema descrito por $H(s) = \dfrac{3}{2s^2 + 10s + 14}$ os valores de:

a) tempo de pico; b) sobressinal percentual; c) tempo de acomodação.

3) Sob que condições um sistema de segunda ordem tem sua saída aproximada à de um sistema de primeira ordem? Justifique sua resposta.

4) Para o sistema em malha aberta $G(s) = \dfrac{\left(K_1 + \dfrac{K_2}{s}\right)}{(s+2)(s+3)}$,

referente a um sistema controlado em modalidade proporcional integral (a ser visto nos próximos capítulos), determine os valores das constantes envolvidas, utilizando o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, para que o sistema em malha fechada seja estável.

5

Técnica do Lugar das Raízes (LGR)

Para começar

Este capítulo tem por objetivo apresentar a técnica do Lugar das Raízes (LGR), que permite a análise de comportamento de um sistema em malha fechada, visando a observar todos os seus possíveis valores possíveis de ganho a partir da movimentação de seus polos.

As informações contidas neste capítulo constituem uma relevante base para o projeto de controladores a partir da localização de raízes do sistema, posto que a aferição de ganho de acordo com tais características é de fácil acesso ao projetista.

5.1 Introdução ao diagrama LGR

O diagrama do Lugar das Raízes (LGR, também chamado de diagrama de Evans ou *root locus*) consiste em um conjunto de curvas no plano complexo s, em que tais curvas representam as posições admissíveis para os polos de malha fechada de um dado sistema, na condição de que seu ganho varie de zero a infinito.

Considere-se a Figura 5.1, indicativa de um sistema realimentado.

O ganho em malha fechada de tal sistema pode ser escrito como:

$$G_{MF}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{5.1}$$

R(s)
+
−
G(s)
C(s)
H(s)

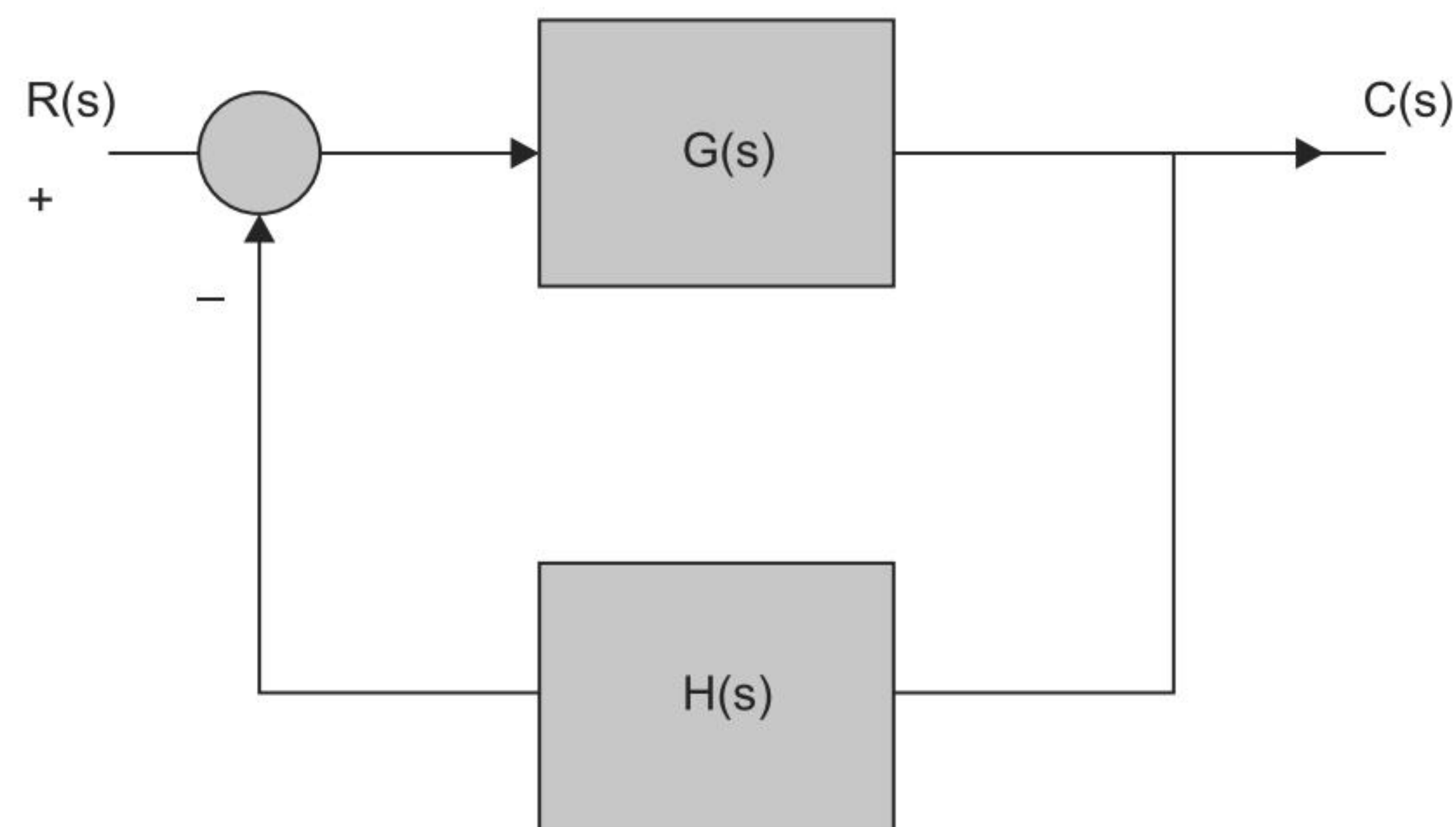



Figura 5.1 - Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.

Os polos de malha fechada são as raízes do polinômio característico $1+G(s)H(s)$, ou seja, para sua determinação é necessário que $G(s)H(s)=-1$, o que leva às condições:

$$|G(s)H(s)|=1 \tag{5.2}$$

$$\angle G(s)H(s)=\pm 180(2k+1),\ \ k=0,1,2... \tag{5.3}$$

Deste modo, o objetivo da técnica é determinar os polos de malha fechada em questão, uma vez que estes caracterizam a resposta do sistema analisado. Neste caso, o parâmetro *K* se torna explícito no sistema em malha aberta, como será visto nos próximos exemplos, sendo relevante ao projetista.

5.2 Projeto de controladores por lugar das raízes - passos de elaboração

Para determinação do Lugar das Raízes, o processo não é trivial, pois envolve o conhecimento apurado de matemática aplicada ao processo. Para levantamento das curvas do Lugar das Raízes associado a um sistema em particular, devem ser executados passos específicos, descritos a seguir.

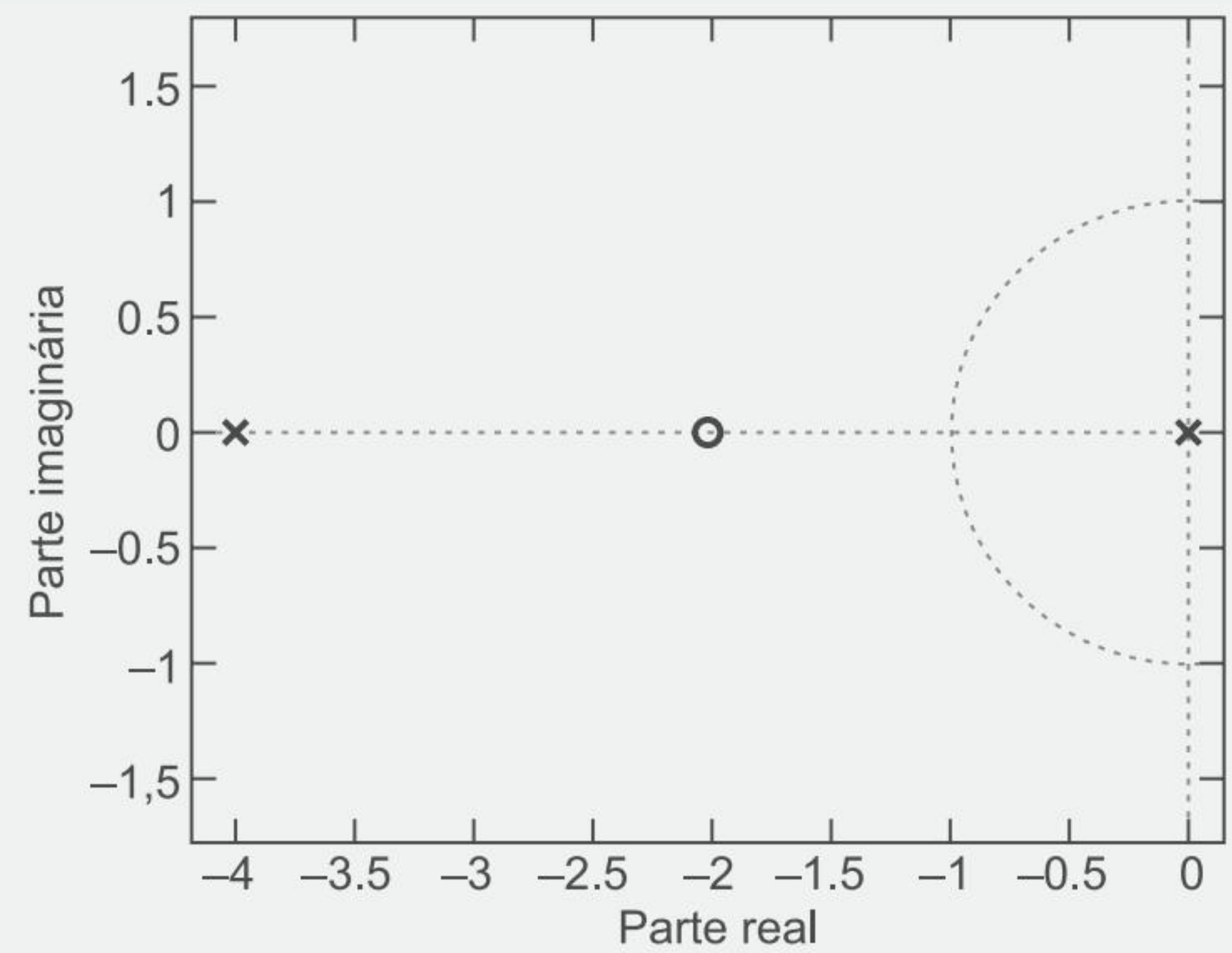
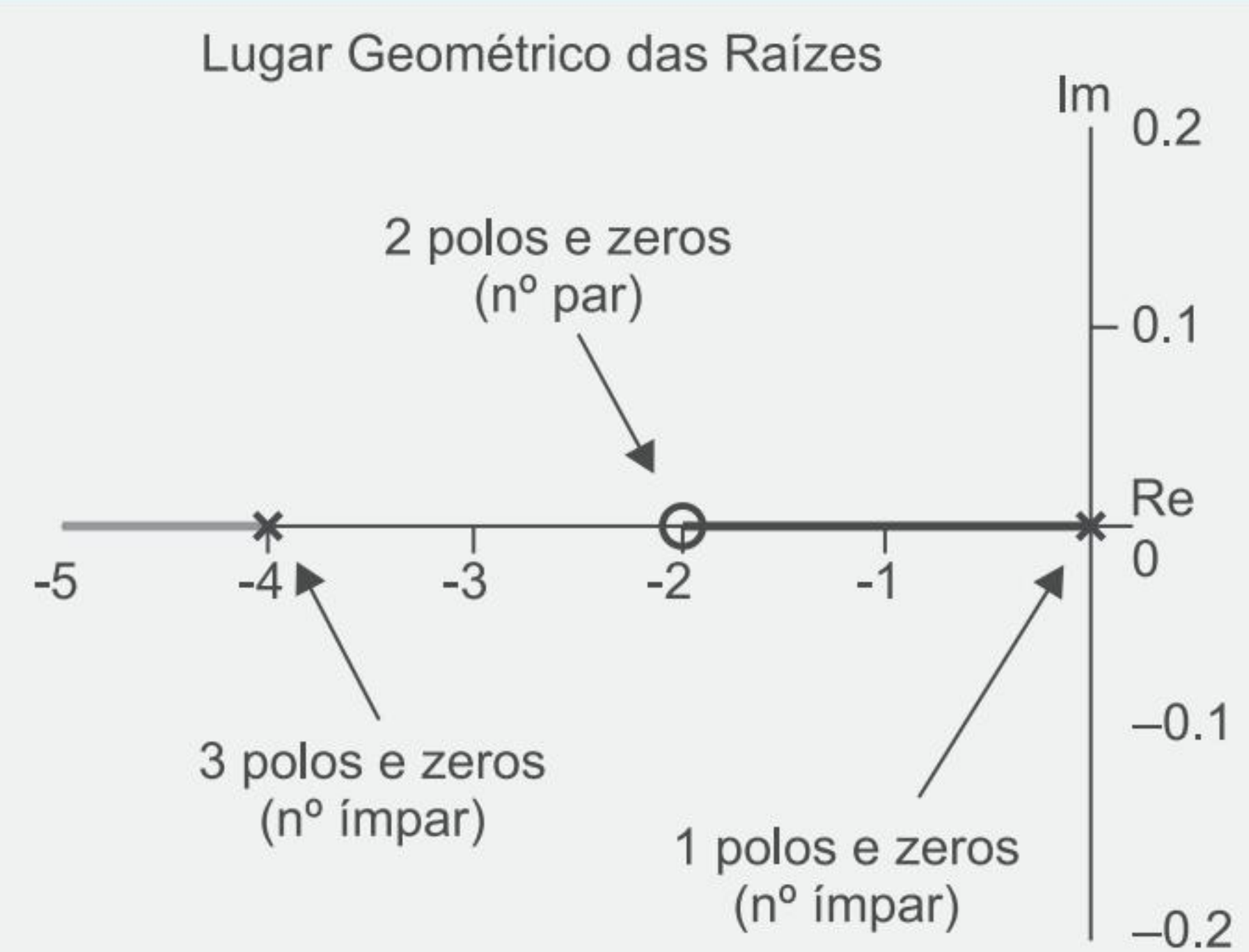
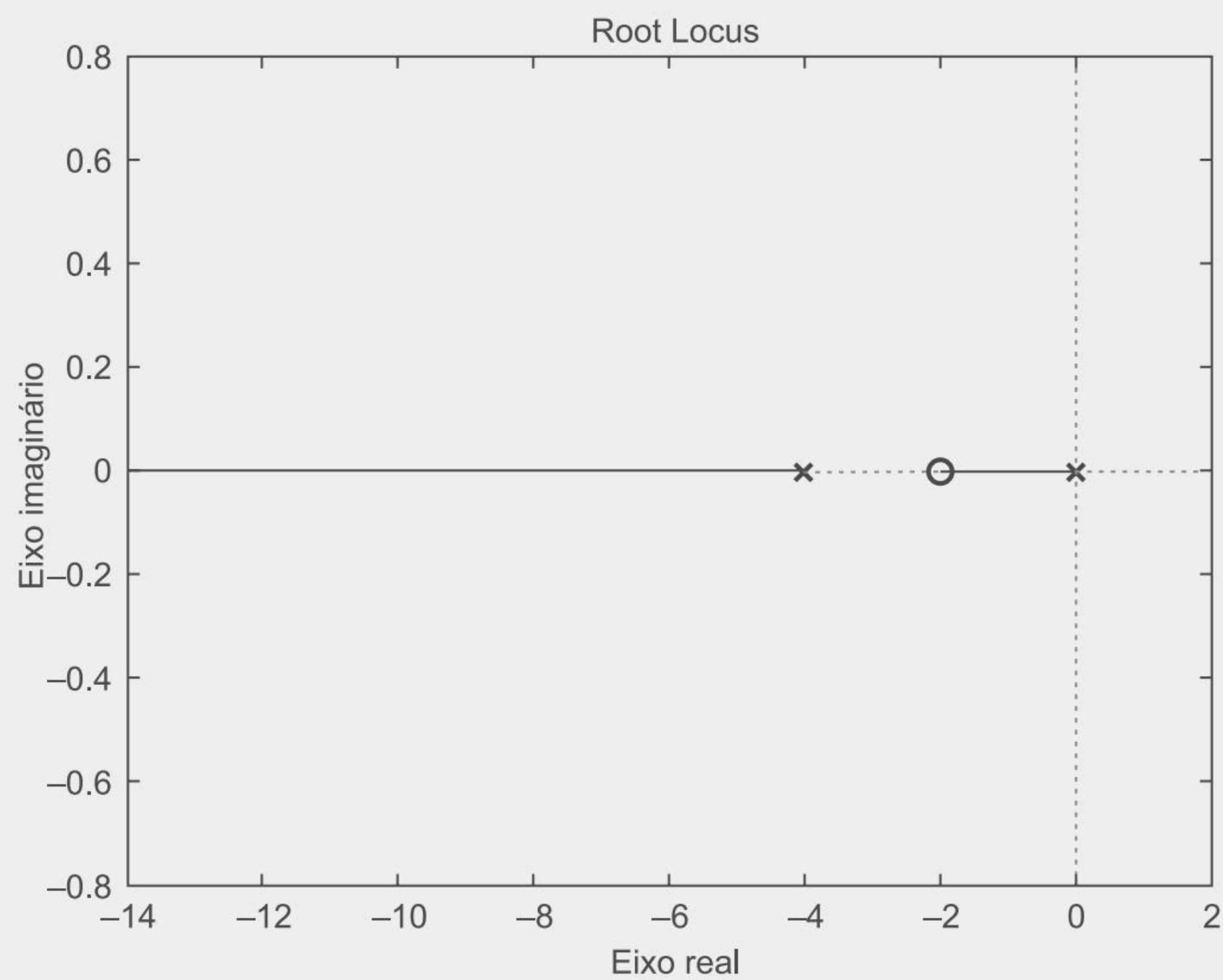
1. Escrever o polinômio característico de modo que o parâmetro de interesse (K) apareça claramente. Exemplo:	$1+G(s)H(s)=1+K.P(s)$
2. Fatorar o polinômio P(s) em termos dos n_P polos e n_Z zeros.	$1+G(s)H(s)=1+K\frac{\prod_{i=1}^{n_Z}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n_P}(s+p_j)}$
3. Assinalar os polos e zeros de malha aberta no plano s com os símbolos correspondentes.	X – polos, O – zeros (o LGR começa nos polos e termina nos zeros)
4. Assinalar os segmentos do eixo real que são LGR.	O LGR se situa à esquerda de um número ímpar de polos e zeros

5. Determinar o número de lugares separados, *LS* (segmentos de curva que compõem o LGR).	$LS = n_P$, quando $n_P \geq n_Z$ n_P = número de polos finitos n_Z = número de zeros finitos
6. O LGR é simétrico com relação ao eixo real (eixo horizontal)	Basta desenhar a parte acima do eixo real e depois espelhar o esboço.
7. $(n_P - n_Z)$ segmentos de um LGR prosseguem em direção aos zeros infinitos, ao longo de assíntotas centralizadas em σ_A e com ângulos ϕ_A.	$\sigma_A = \frac{\sum(-p_j) - \sum(-z_i)}{n_P - n_Z}$ $\phi_A = \frac{(2q+1)}{n_P - n_Z}.180°,\ q = 0,1,2,\ldots,(n_P - n_Z - 1)$
8. Determinar o ponto de saída (se existir) sobre o eixo real.	a) Fazer $K = P(s)$; b) Determinar as raízes de $\frac{dP(s)}{ds} = 0$
9. Utilizando o critério de Routh-Hurwitz, determinar o ponto no qual o eixo imaginário é cruzado (se isso ocorrer).	Ver critério de estabilidade de Routh-Hurwitz
10. Usando a condição de ângulo, determinar o ângulo de partida para os polos complexos e o ângulo de chegada para os zeros complexos.	Ângulo de partida $= 180° - \sum\theta_i + \sum\phi_j$ Ângulo de chegada $= 180° - \sum\phi_i + \sum\theta_j$ em que: θ_i = ângulos de vetores partindo dos demais polos até o polo em questão φ_j = ângulos de vetores partindo dos demais zeros até o polo em questão

Exercício Resolvido

1) Esboce o LGR para o sistema em malha aberta $G(s) = K\frac{s+2}{s(s+4)}$.

Solução

1. Escrever o polinômio característico de modo que o parâmetro de interesse (*K*) apareça claramente	$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+2)}{s^2+4s}$
2. Fatorar o polinômio $P(s)$ em termos dos n_P polos e n_Z zeros.	$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+2)}{s^2+4s} \Rightarrow P(s) = \frac{s+2}{s(s+4)}$

3. Assinalar os polos e zeros de malha aberta no plano s com os símbolos correspondentes.	
4. Assinalar os segmentos do eixo real que são LGR.	

LGR final

Exercício Resolvido

2) Esboce o LGR para o sistema em malha aberta $H(s) = \dfrac{K}{(s+2)(s+4)}$, com ganho de realimentação igual a $\dfrac{s+1}{s(s+4)}$.

Solução

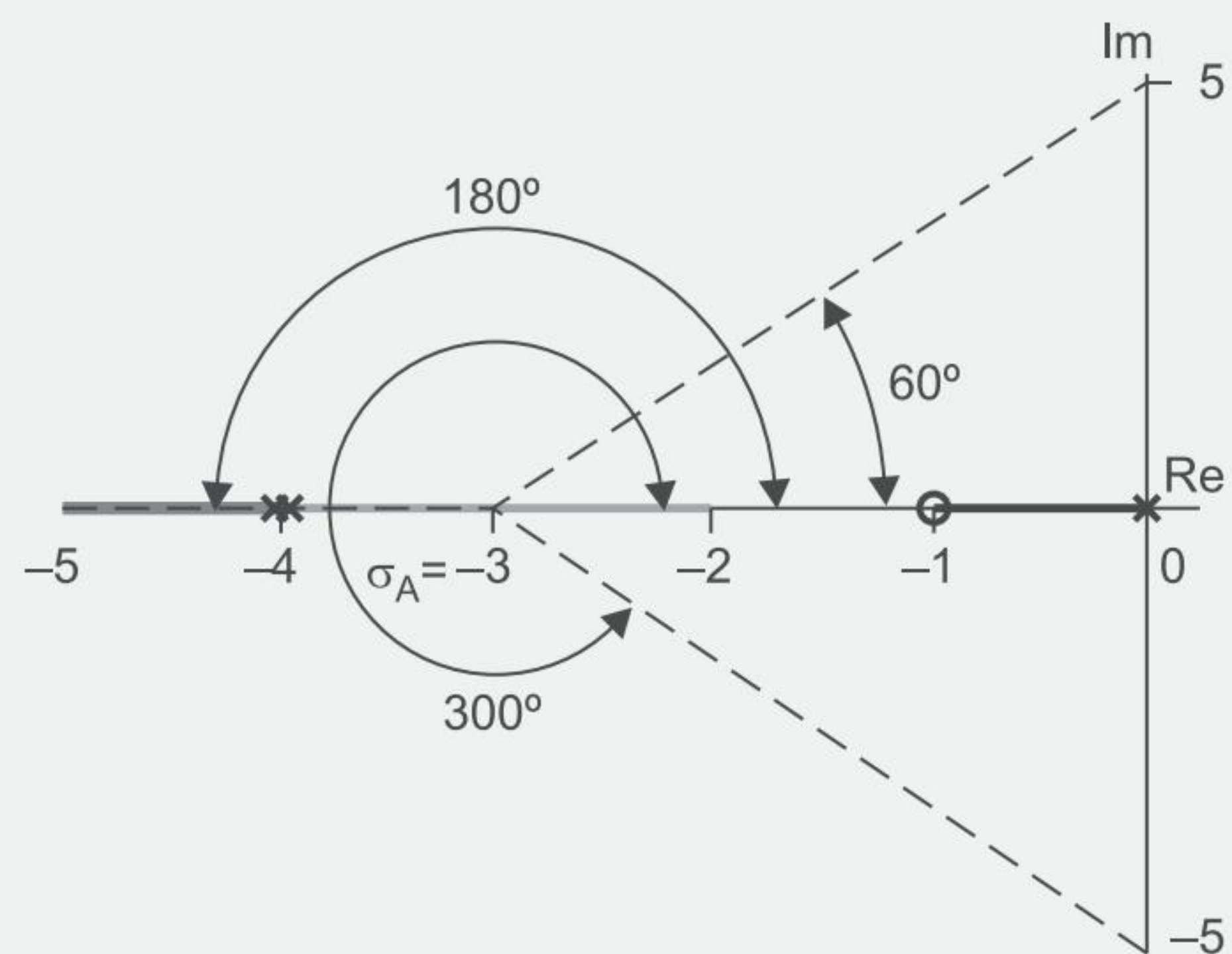
1. Escrever o polinômio característico de modo que o parâmetro de interesse (*K*) apareça claramente	$1+G(s)H(s) = 1+\dfrac{K(s+1)}{s^4+10s^3+32s^2+32s}$
2. Fatorar o polinômio $P(s)$ em termos dos n_P polos e n_Z zeros.	$P(s) = \dfrac{s+1}{s(s+2)(s+4)^2}$
3. Assinalar os polos e zeros de malha aberta no plano s com os símbolos correspondentes.	Polo com multiplicidade 2 Im, Re 5, –5 –5, –4, –3, –2, –1, 0
4. Assinalar os segmentos do eixo real que são LGR.	Trecho entre 2 polos Polo com multiplicidade 2 Total de 2 polos e zeros (nº par) Total de 3 polos e zeros (nº ímpar) Total de 1 polos e zeros (nº ímpar) Im, Re 5, –5 –5, –4, –3, –2, –1, 0
5. Determinar o número de lugares separados, *LS*	$LS = n_P = 4$
6. O LGR é simétrico com relação ao eixo real	

7. $(n_P - n_Z)$ segmentos de um LGR prosseguem em direção aos zeros infinitos, ao longo de assíntotas centralizadas em σ_A e com ângulos ϕ_A.

$$\sigma_A = \frac{\sum(-p_j) - \sum(-z_i)}{n_P - n_Z}$$

$$\sigma_A = \frac{-2-8+1}{4-1} = \frac{-9}{3} = -3$$

$$\phi_A = \frac{(2q+1)}{n_P - n_Z}.180^\circ,\ q = 0,1,2,...,(n_P - n_Z - 1)$$

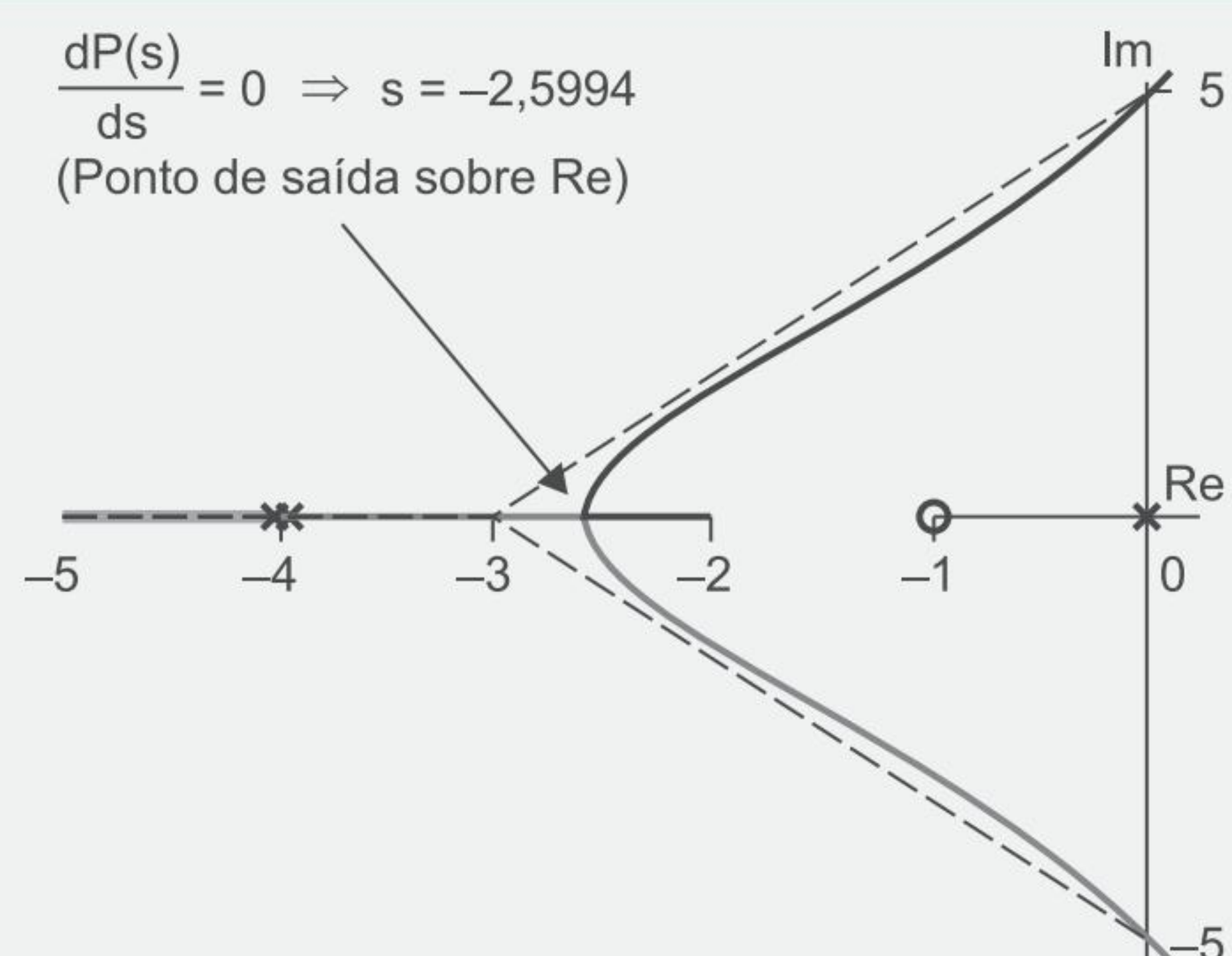
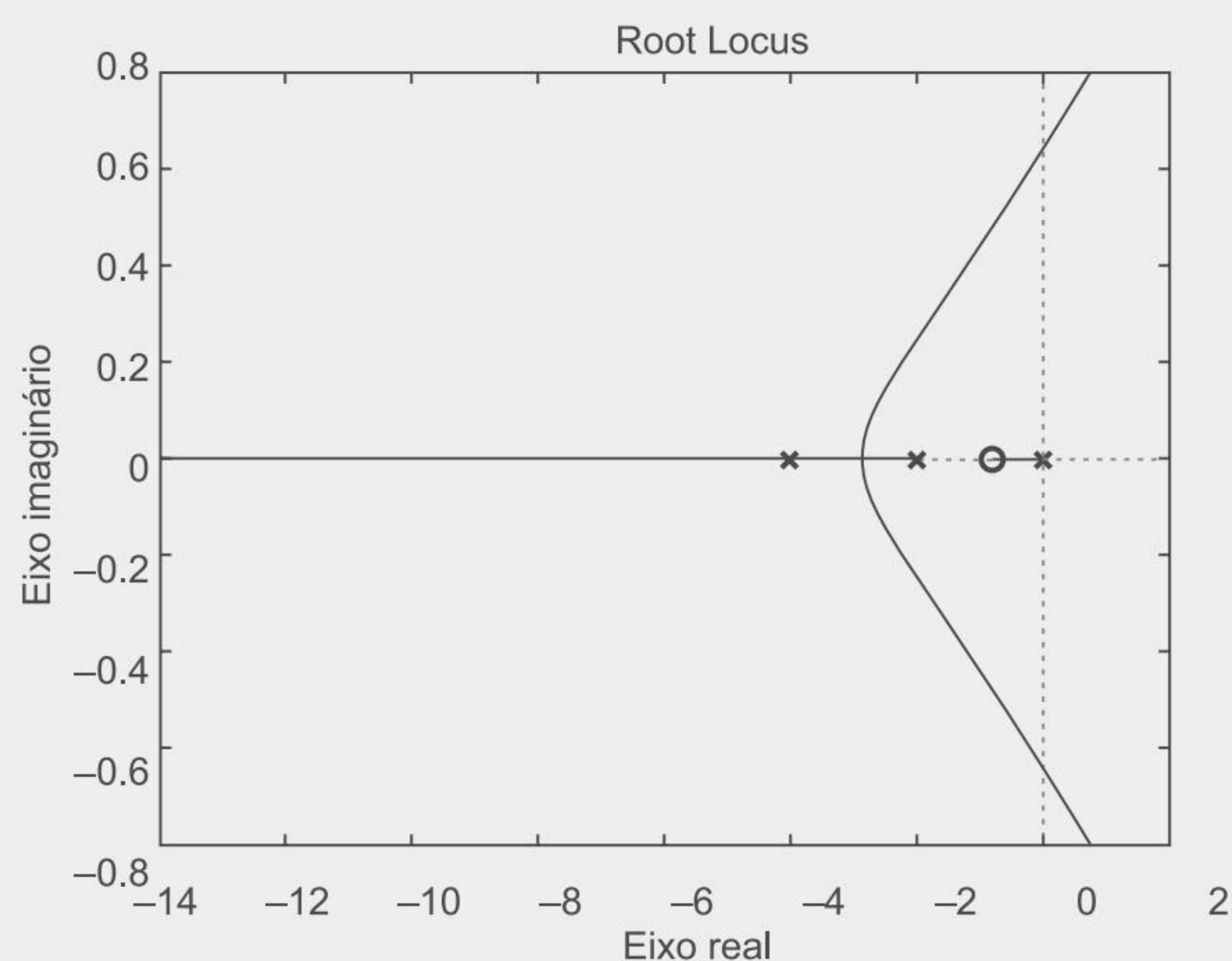
$$\varphi_A = \begin{cases} 60^\circ,\ q = 0 \\ 180^\circ,\ q = 1 \\ 300^\circ,\ q = 2 \end{cases}$$

8. Determinar o ponto de saída (se existir) sobre o eixo real.
Fazer $K = P(s)$;

Determinar as raízes de $\frac{dP(s)}{ds} = 0$

$$1 + K.P(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s^4 + 10s^3 + 32s^2 + 32s}$$

$$P(s) = K = -\frac{s^4 + 10s^3 + 32s^2 + 32s}{s+1}$$

$$\frac{dP(s)}{ds} = -\frac{3s^4 + 24s^3 + 62s^2 + 64s + 32}{(s+1)^2} = 0$$

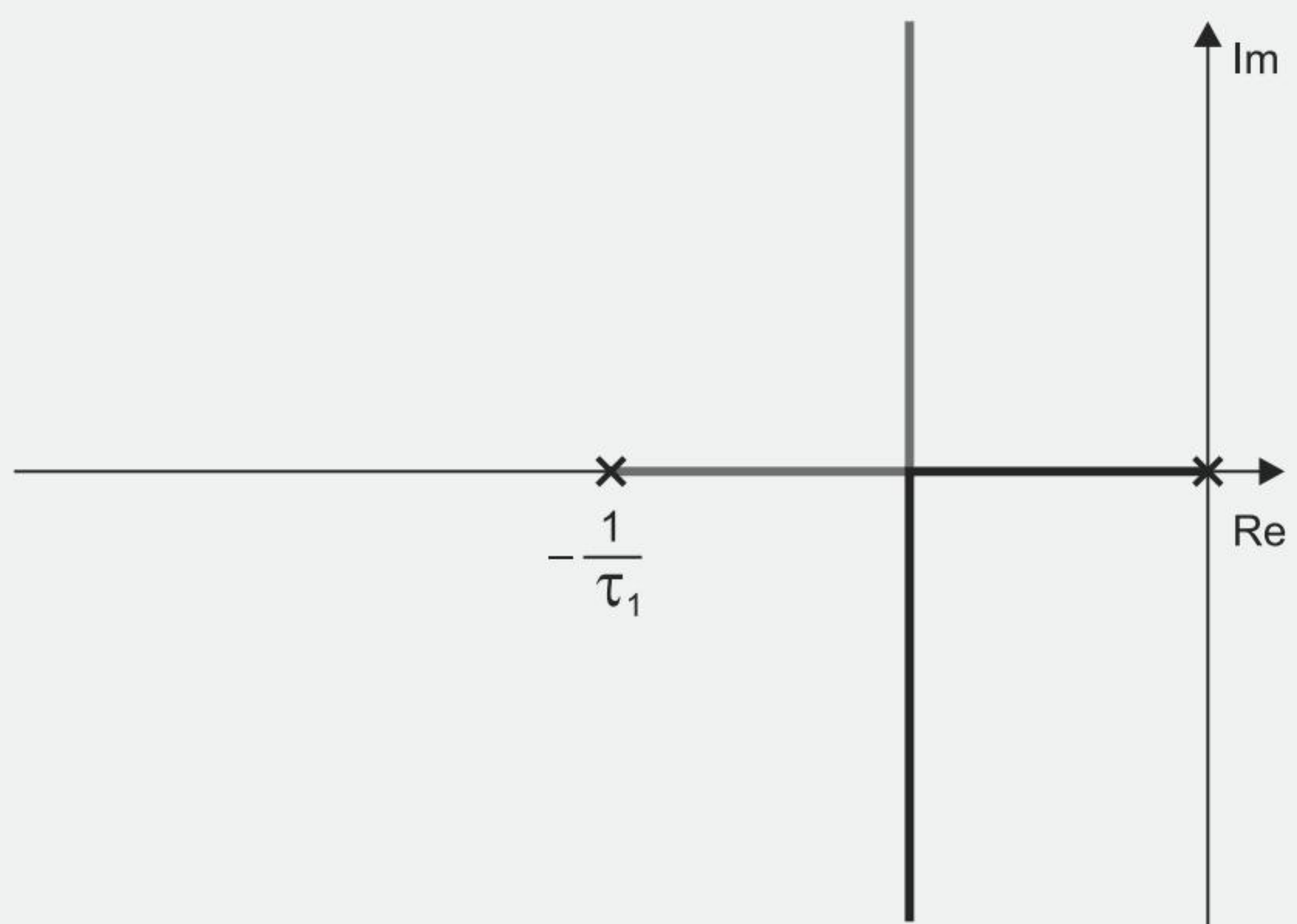
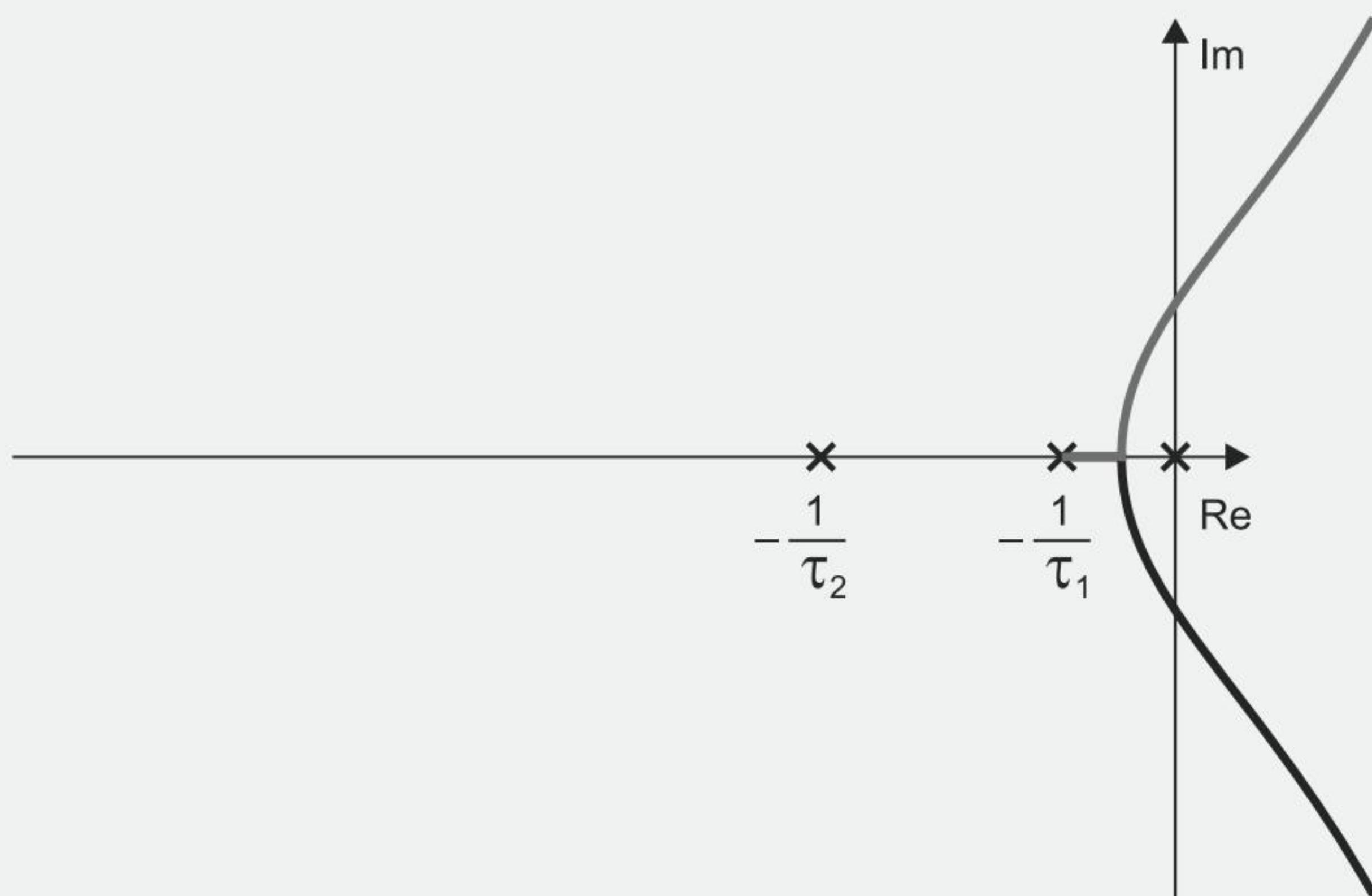
$$s = -2,5994$$

LGR final

Fique de olho!

O LGR é sempre simétrico em relação ao eixo real, já que os polos de um sistema linear, quando não são reais, sempre são complexos conjugados.

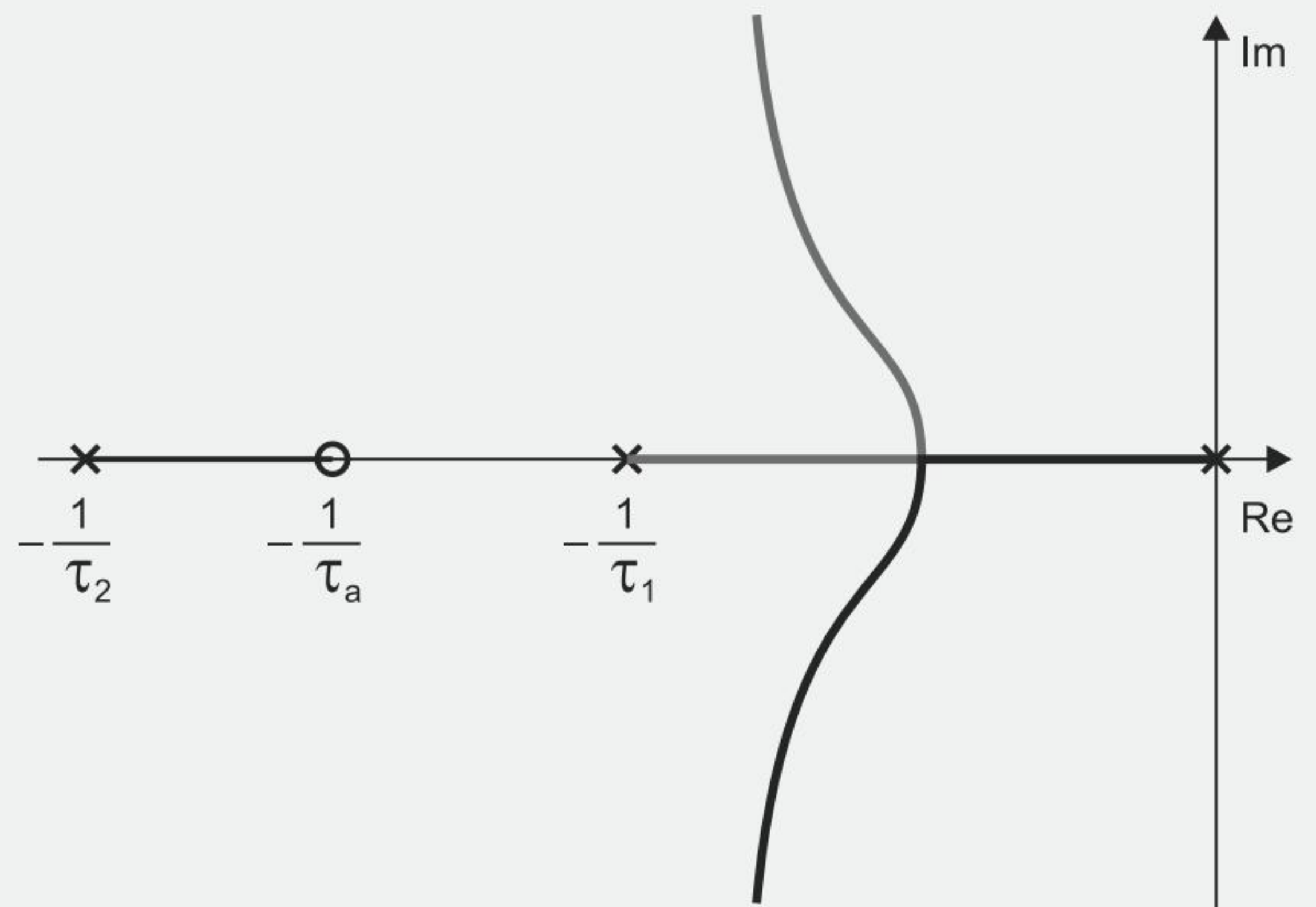
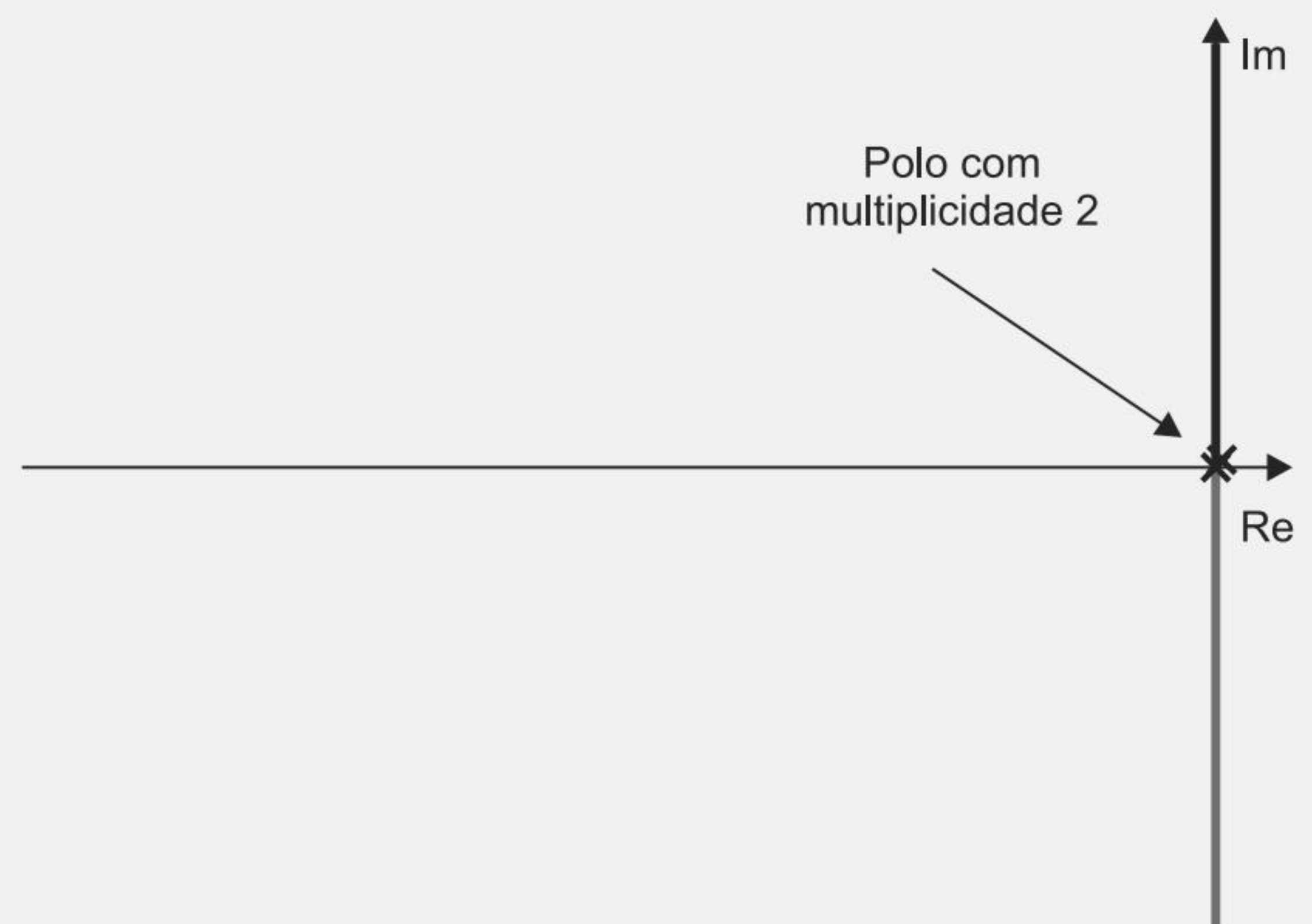
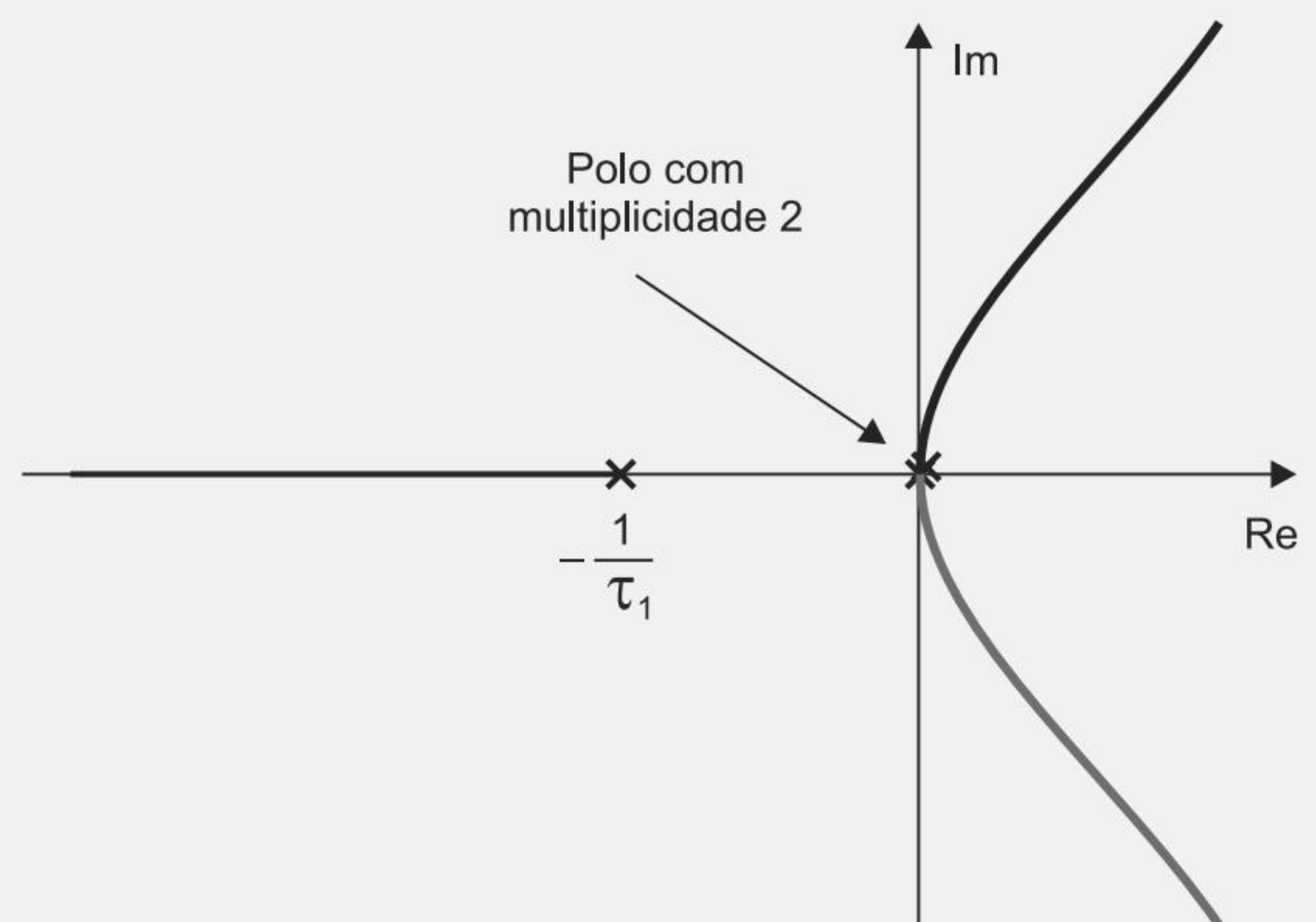
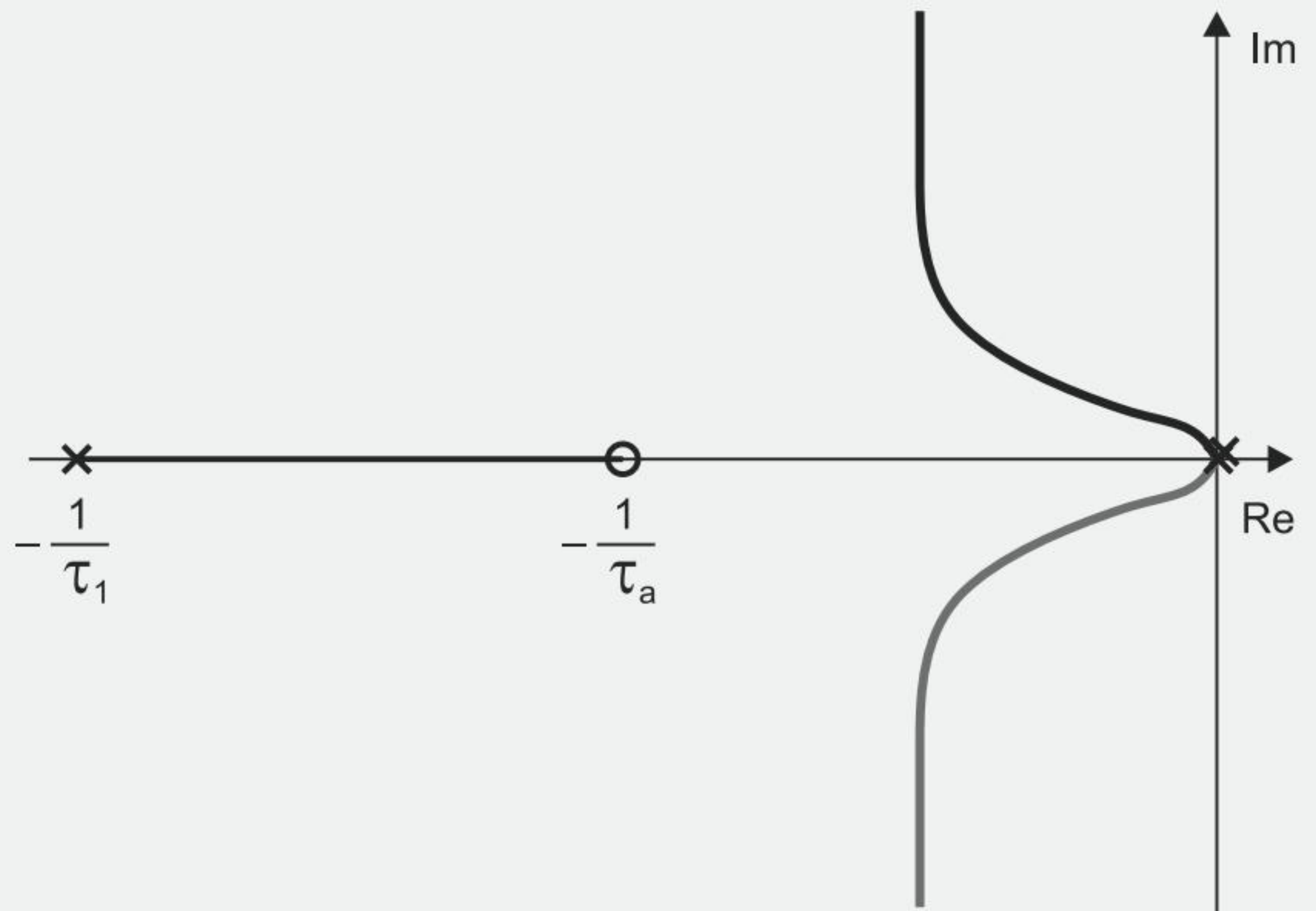
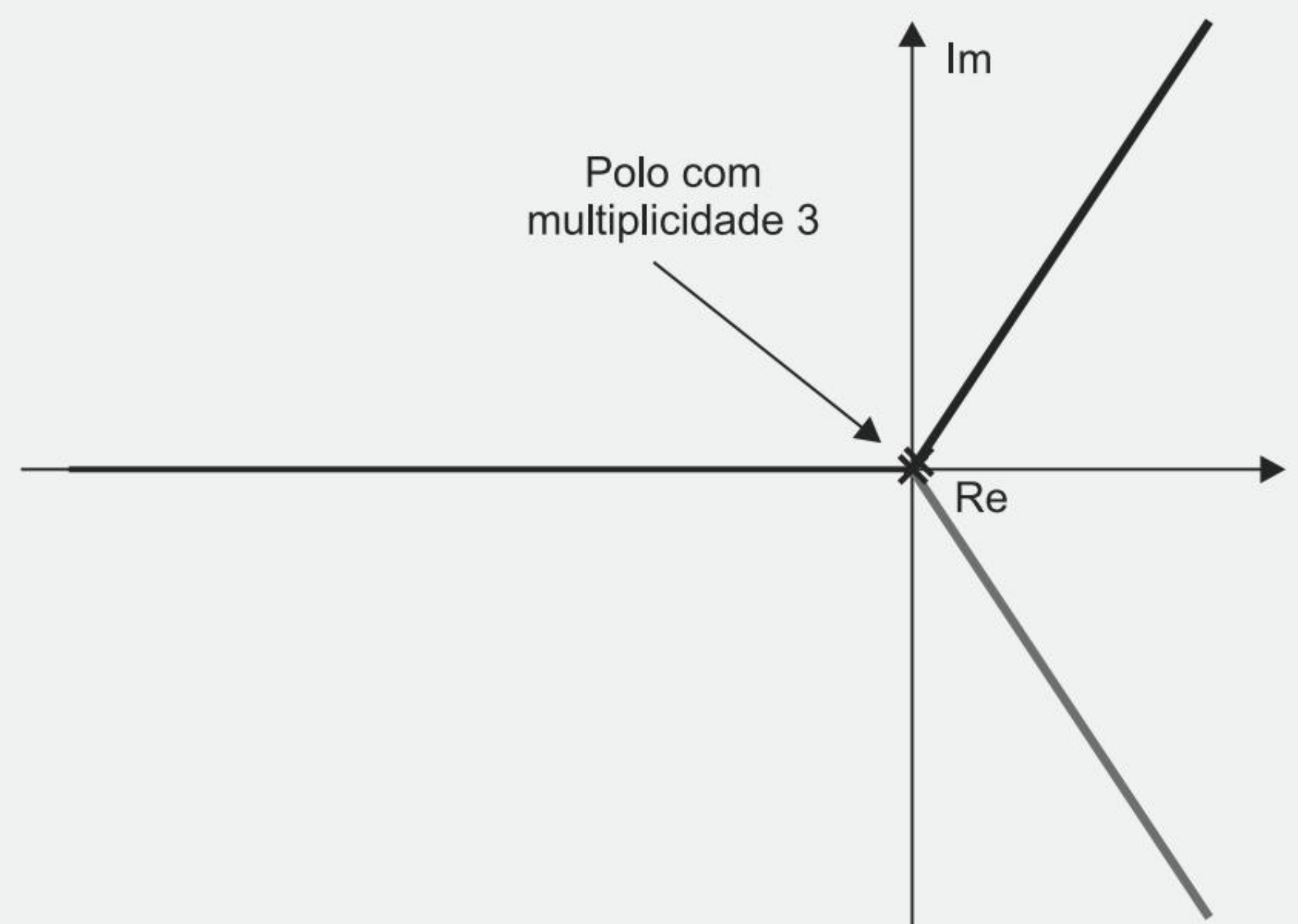
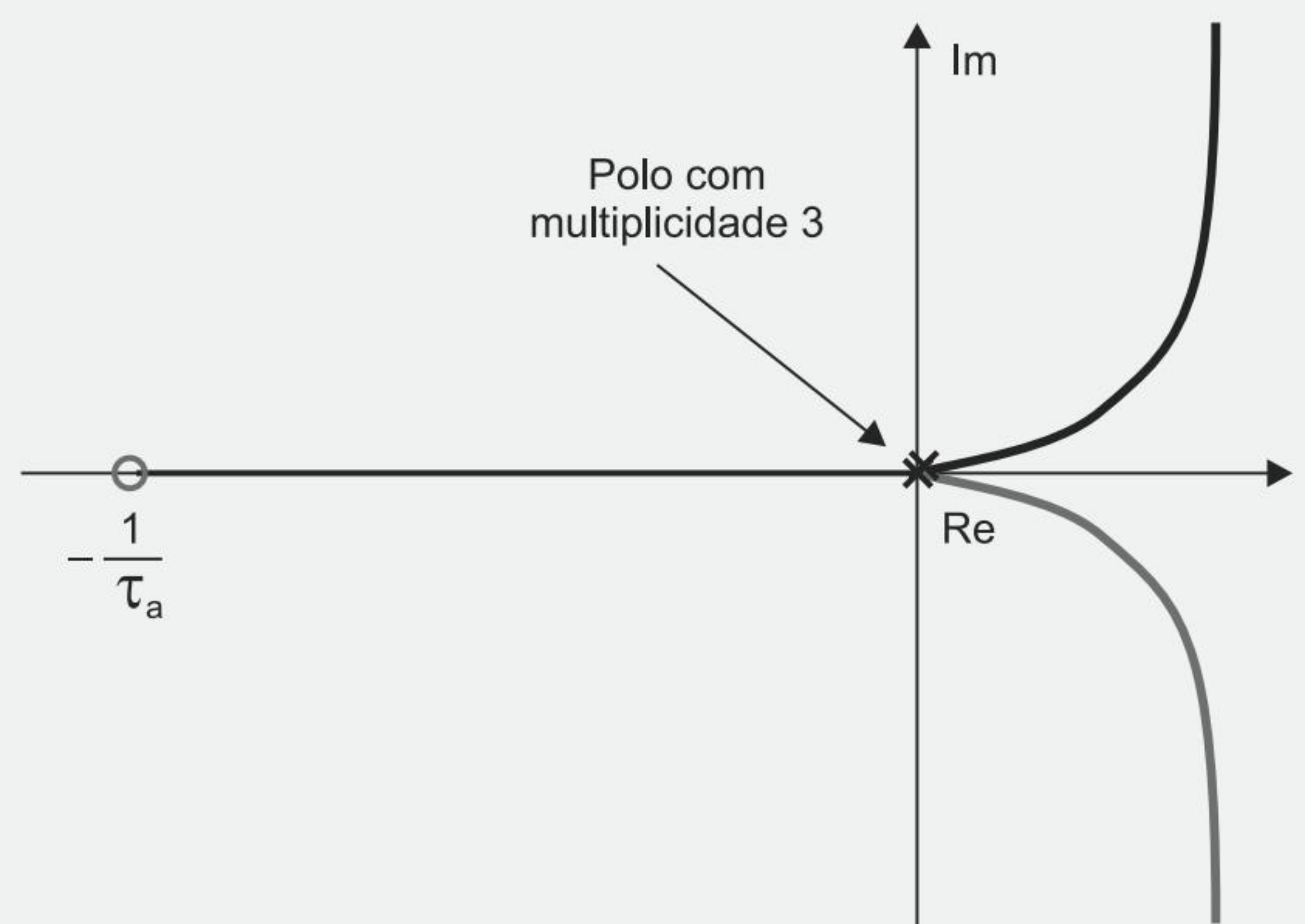
5.3 Lugar das raízes para funções de transferência típicas

O Quadro 5.1 a seguir sumariza diferentes lugares das raízes para algumas das funções de transferência usuais no plano complexo.

Quadro 5.1 - Lugar das raízes para funções de transferência usuais no plano complexo.

KG(s)H(s)	LGR
$\frac{K}{\tau_1 s+1}$	Im; Re; $-\frac{1}{\tau_1}$
$\frac{K}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$	Im; Re; $-\frac{1}{\tau_1}$; $-\frac{1}{\tau_2}$
$\frac{K}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1)}$	Im; Re; $-\frac{1}{\tau_3}$; $-\frac{1}{\tau_2}$; $-\frac{1}{\tau_1}$

$\frac{K}{s}$	Im Re
$\frac{K}{s(\tau_1 s+1)}$	Im $-\frac{1}{\tau_1}$ Re
$\frac{K}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$	Im $-\frac{1}{\tau_2}$ $-\frac{1}{\tau_1}$ Re

$\dfrac{K(s\tau_a+1)}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$	Im, Re, $-\dfrac{1}{\tau_2}$, $-\dfrac{1}{\tau_a}$, $-\dfrac{1}{\tau_1}$
$\dfrac{K}{s^2}$	Im, Polo com multiplicidade 2, Re
$\dfrac{K}{s^2(\tau_1 s+1)}$	Im, Polo com multiplicidade 2, $-\dfrac{1}{\tau_1}$, Re

$\dfrac{K(s\tau_a + 1)}{s^2(\tau_1 s + 1)}, \quad \tau_a > \tau_1$	Im, Re, $-\dfrac{1}{\tau_1}$, $-\dfrac{1}{\tau_a}$
$\dfrac{K}{s^3}$	Im, Re, Polo com multiplicidade 3
$\dfrac{K(s\tau_a + 1)}{s^3}$	Im, Re, Polo com multiplicidade 3, $-\dfrac{1}{\tau_a}$

$$\frac{K(s\tau_a+1)(s\tau_b+1)}{s^3}$$	Im; Re; Polo com multiplicidade 3; $-\frac{1}{\tau_b}$; $-\frac{1}{\tau_a}$
$$\frac{K(s\tau_a+1)}{s^2(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$$	Im; Re; Polo com multiplicidade 2; $-\frac{1}{\tau_2}$; $-\frac{1}{\tau_1}$; $-\frac{1}{\tau_a}$
$$\frac{K(s\tau_a+1)(s\tau_b+1)}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)(s\tau_3+1)(s\tau_4+1)}$$	Im; Re

Fique de olho!

Os pontos de partida do LGR (pontos em que $K = 0$) coincidem com os polos da função de transferência em malha aberta.

Vamos recapitular?

Foram apresentados neste capítulo conceitos para a construção do lugar geométrico das raízes, técnica útil na observação do comportamento de um sistema a entradas conhecidas. Por meio da variação de ganho em malha aberta, é possível observar os valores de resposta em malha fechada, o que serve de suporte ao projeto de controladores. Igualmente, o LGR oferece auxílio à avaliação das características da resposta no tempo do sistema em malha fechada, como função da variação de parâmetros conhecidos.

O capítulo reforçou, entre outros elementos, a relevância do conhecimento da localização das raízes do polinômio característico e suas condições de obtenção a partir do manuseio do LGR.

Agora é com você!

1) Esboce o lugar das raízes para os sistemas em malha aberta apresentados a seguir.

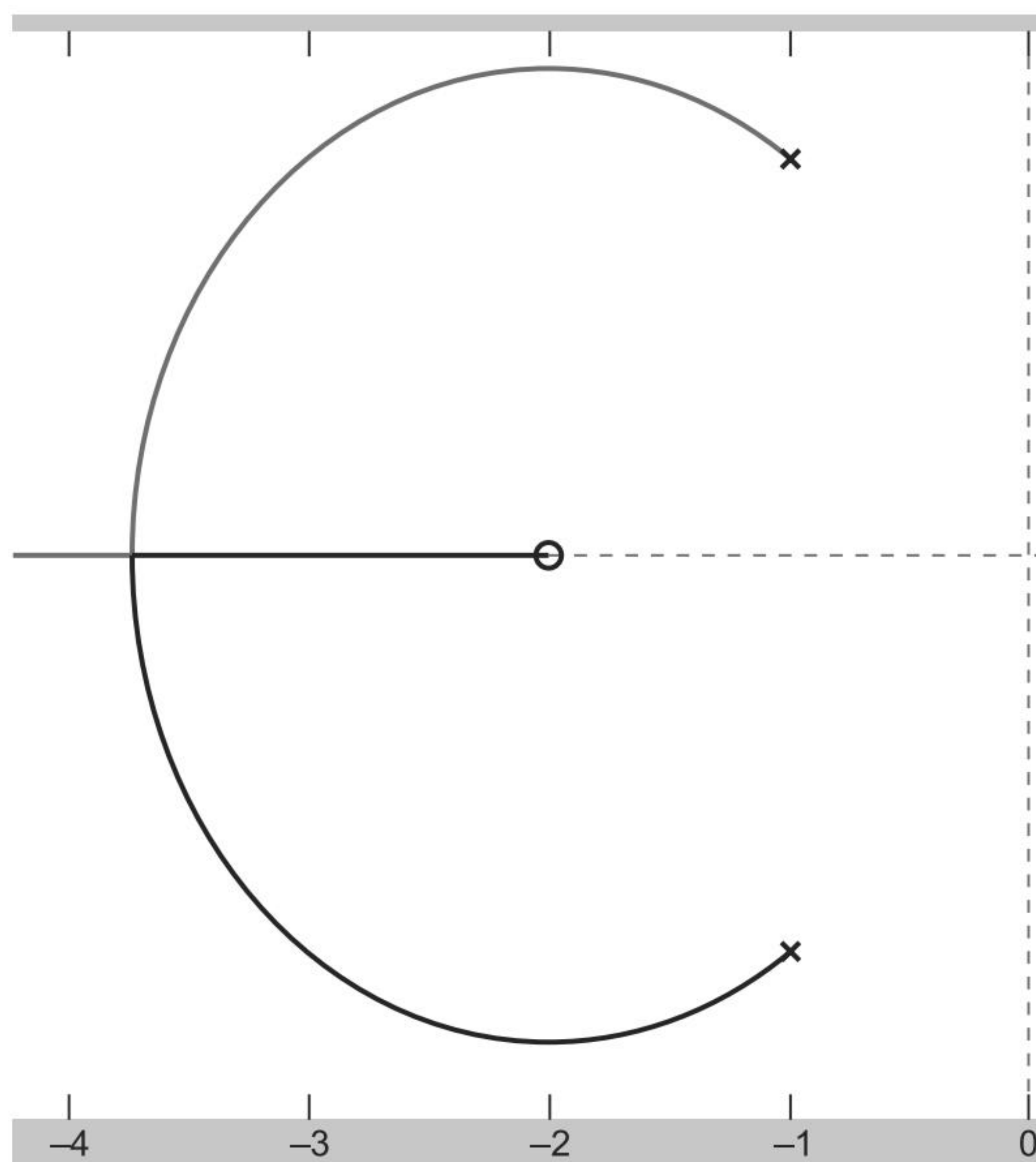
a) $G(s) = \dfrac{4}{s^2 + 7s + 12}$

b) $G(s) = \dfrac{4s + 1}{s^2 + 3s + 5}$

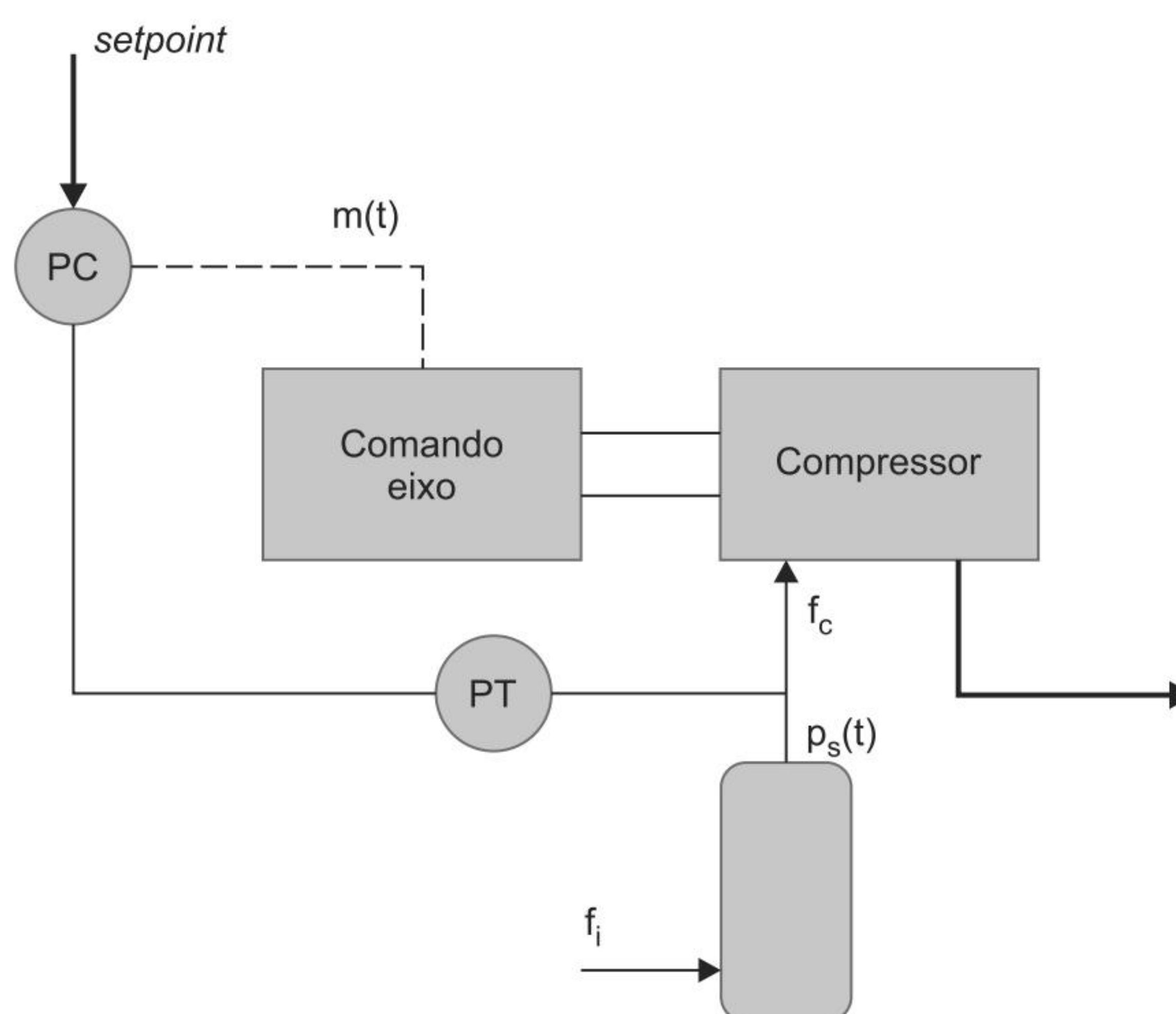
c) $G(s) = \dfrac{3}{s^3 + 12s^2 + 4s + 3}$

d) $G(s) = \dfrac{6}{s^3 + 4s^2 + 8}$

É possível, para tais sistemas, designar diretamente no gráfico a posição em que as curvas “explodem”? Justifique sua resposta.

2) Para o lugar das raízes ilustrado a seguir, o que se pode afirmar a respeito do sistema em malha fechada considerado?

3) Para o sistema em malha aberta $G(s) = \dfrac{\left(K_1 + \dfrac{K_2}{s}\right)}{(s+2)(s+3)}$, apresentado no capítulo anterior:

   » atribua valores para as constantes que assegurem estabilidade, e esboce o lugar das raízes do sistema arbitrado.

4) O controle da pressão de sucção de um compressor é apresentado na figura a seguir.

Considerando-se constante a vazão de entrada no reservatório (f_i), pode-se deduzir o seguinte modelo dinâmico que relaciona a vazão no compressor f_c (em unidades físicas adequadas) à pressão de sucção (P_S, expressa em psi):

$$P_S(s) = \frac{-0.5}{7,5s+1}.F_c(s)$$

Além disso, a resposta da vazão no compressor em relação ao sinal de comando $M(s)$ (em %) é dada por:

$$F_C(s) = \frac{0,36}{2,5s+1}M(s)$$

O transmissor de pressão possui ganho unitário e constante de tempo de 1,2s.

Com base nas informações dadas, responda aos itens a seguir.

a) O controlador deverá possuir ação direta ou realimentada? Explique.

b) Faça um diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

c) Obtenha a função de transferência em malha fechada.

6

Ações de Controle

Para começar

Este capítulo tem por objetivo apresentar as ações de controle mais conhecidas, de acordo com as especificações de desempenho desejadas. São abordados conceitos de controle e compensação, à luz das modalidades de controle proporcional, controle derivativo e controle integral, além das técnicas de compensação baseadas em avanço e atraso de fase.

As informações contidas neste capítulo constituem o cerne da tarefa do projetista de controle de sistemas lineares, sintetizando toda a teoria apresentada ao longo desta obra. No caso, o uso de uma estratégia sobre outra pode revelar vantagens e desvantagens que não devem escapar ao entendimento do projetista.

6.1 Estratégias de controle

Como expresso no Capítulo 1, um controlador tem por finalidade manipular a relação entre sinal de saída e sinal de entrada de um sistema, atuando sobre seus parâmetros a fim de se atingirem especificações de desempenho. Por meio da manipulação de algumas variáveis, controlam-se outras, no que o controlador pode ser representado sob diversos enfoques, advindo daí a necessidade de o projetista saber qual modalidade de controle utilizar. Nesse sentido, um controlador pode atuar em malha aberta ou malha fechada (realimentado).

Dentro da classe de controladores realimentados, destacam-se duas abordagens: as que operam sobre o ganho (módulo) dos sinais envolvidos e as que operam sobre a fase destes. Faz-se aqui uma pormenorização dessas abordagens, para estudo.

6.2 Controle on-off

Nesta estratégia de controle, o elemento de atuação possui apenas dois estados. Sua aplicação se justifica pela facilidade de construção e baixo custo. Dependendo do sinal do erro, a entrada é estabelecida na posição máxima ou mínima.

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & e(t) > 0 \\ u_2, & e(t) < 0 \end{cases}$$

O segundo termo é mínimo e igual a zero ou o oposto do máximo. Tais controladores são geralmente implementados com o uso de válvulas solenoides.

6.3 Controle proporcional (P)

A ação de controle proporcional estabelece uma relação direta entre saída e entrada, dada pelo ganho proporcional K, mostrado na Figura 6.1. O erro de estado estacionário é denominado e_{SS}, e é inversamente proporcional ao ganho. Todavia, a diminuição do erro conduz a um maior tempo de estabilização, podendo até conduzir à instabilidade. Por outro lado, a redução do ganho torna o sistema menos afeito à instabilidade, reduzindo-se também o tempo de estabilização, mas elevando o erro de regime. Um sistema de controle do tipo proporcional não acrescenta zeros nem polos ao sistema em estudo, constituindo apenas um ajuste de ganho.

$$\begin{aligned} u(t) &= Ke(t) = K[r(t) - y(t)] \\ U(s) &= KE(s) \end{aligned} \tag{6.1}$$

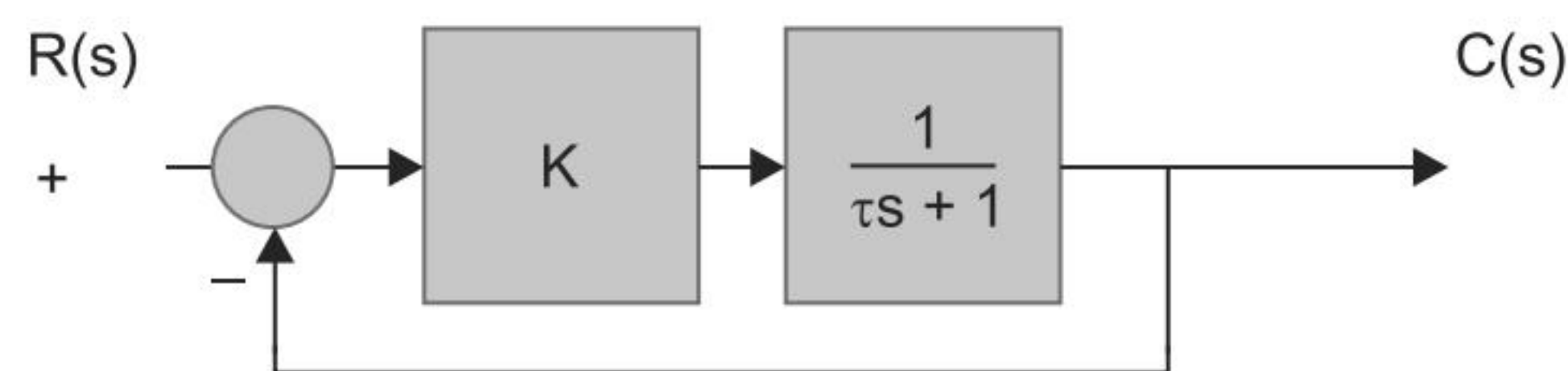



Figura 6.1 - Diagrama de blocos de um controlador proporcional atuando em malha fechada.

Para uma entrada do tipo degrau, o erro em estado estacionário se resume a:

$$e_{SS} = \frac{1}{1+K}, \tag{6.2}$$

o que nem sempre é viável.

6.4 Controle proporcional + derivativo (PD)

A ação derivativa, associada à ação proporcional, provoca o acréscimo de um zero ao sistema, o que é benéfico na resposta transitória, além de fornecer maior estabilidade ao sistema e reduzir o tempo de estabilização, já que se insere um zero em

$$z = -\frac{K_P}{K_d}.$$

Por outro lado, eleva-se o tempo de subida, além de não corrigir o erro em regime permanente.

$$u(t) = K_P\left(e(t) + \tau_d \frac{de(t)}{dt}\right)$$
$$U(s) = (K_P + K_d s)E(s) \tag{6.3}$$
$$K_d = K_P \tau_d$$

A ação derivativa, de fato, introduz um efeito de antecipação na resposta do sistema, fazendo com que ele responda não somente à magnitude do sinal de erro, mas também à sua tendência para tempos posteriores, agindo preventivamente, Figura 6.2. Uma vez que a derivada de um sinal representa sua inclinação da função, o controle derivativo é essencialmente um tipo que antecipa a tendência desse sinal, predizendo um sobre ou subsinal à frente no tempo, perfazendo as apropriadas correções antes daquele sobre ou subsinal acontecer.

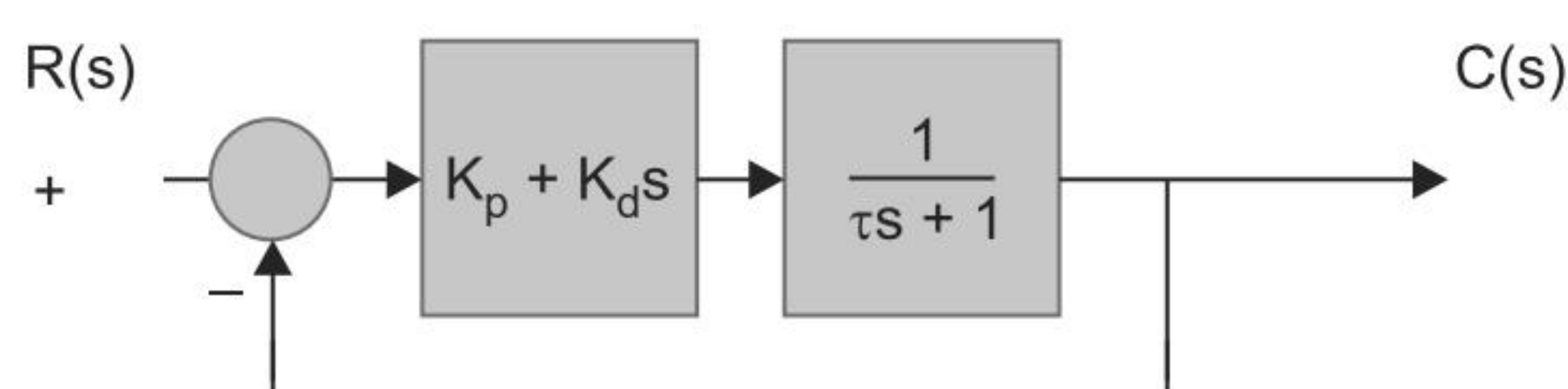



Figura 6.2 - Diagrama de blocos de um controlador proporcional + derivativo em malha fechada.

6.5 Controle proporcional + integral (PI)

A ação de controle proporcional associada à integral corresponde ao estabelecimento de uma taxa de variação do sinal de saída com relação ao sinal de entrada na forma:

$$u(t) = K_P\left(e(t) + \frac{1}{\tau_i}\int_0^t e(\tau)d\tau\right) \Rightarrow \quad U(s) = \frac{(K_P s + K_i)E(s)}{s} \quad \Rightarrow \quad K_i = \frac{K_P}{\tau_i} \tag{6.4}$$

Com a ação integral, atua-se de modo efetivo na resposta em regime permanente, o que diminui o erro de estado estacionário. Todavia, traz-se prejuízo ao regime transitório, pois são acrescidas raízes ao sistema que tendem a desestabilizá-lo (um polo em $p = 0$ e um zero em $z = -\frac{K_i}{K_P}$), o que também acarreta aumento do tempo de estabilização.

Ao se condensar a ação proporcional à integral, é possível um melhor desempenho na resposta transitória em razão da ação proporcional, ao passo que a ação integral age sobre o erro em regime permanente, em que a ação proporcional falha, como mostra a Figura 6.3.

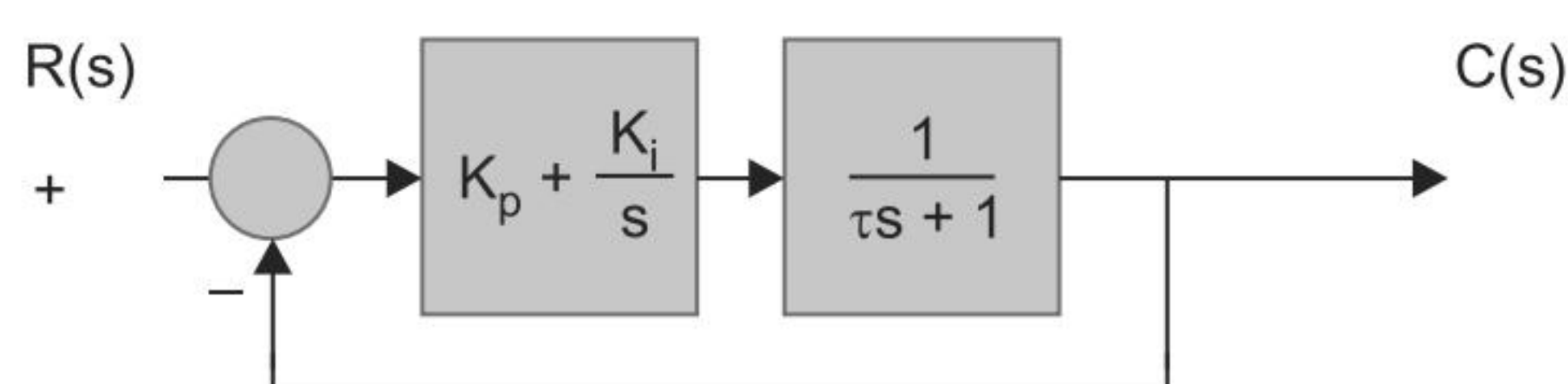



Figura 6.3 - Diagrama de blocos de um controlador proporcional + integral atuando em malha fechada.

Para uma entrada do tipo degrau, o erro em estado estacionário se resume a:

$$e_{SS} = \frac{1}{1+\infty} = 0\,, \qquad (6.5)$$

Tal resultado é esperado, pois a finalidade da ação de controle integral visa justamente a eliminar o erro em regime permanente.

6.6 Controle proporcional + integral + derivativo (PID)

A ação proporcional aliada às ações integral e derivativa permite efeitos tanto no regime transitório quanto no regime permanente, prestando-se assim a solucionar problemas nos dois regimes, Figura 6.4.

$$u(t) = K_P\left(e(t) + \frac{1}{\tau_i}\int_0^t e(\tau)d\tau + \tau_d\frac{de(t)}{dt}\right)$$

$$U(s) = \frac{(K_P s + K_i + K_d s^2)E(s)}{s} \qquad (6.6)$$

$$K_i = \frac{K_P}{\tau_i},\; K_d = K_P\tau_d$$

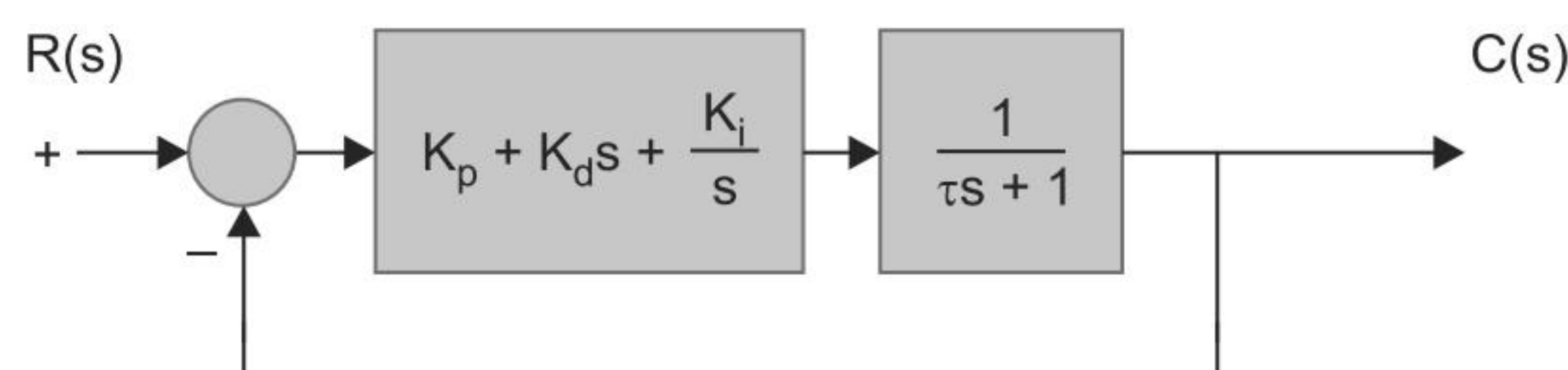



Figura 6.4 - Diagrama de blocos de um controlador proporcional + integral + derivativo atuando em malha fechada.

Boa parte dos controladores industriais atuais faz uso da estratégia PID. Isso se deve ao fato de que o desempenho de tais controladores é robusto sobre uma ampla faixa de condições de operação, além de sua simplicidade de implementação.

A Tabela 6.1 sumariza as características principais das ações proporcional, integral e derivativa, atuantes simultaneamente em um controlador PID.

Tabela 6.1 - Especificações de desempenho para cada modalidade de controle realimentado

Ganho	Tempo de subida	Sobressinal	Tempo de estabilização	Erro de regime permanente
K_P	Diminui	Aumenta	Pequena alteração	Diminui
K_i	Diminui	Aumenta	Diminui	Elimina
K_d	Pequena alteração	Diminui	Aumenta	Pequena alteração

O efeito resultante de fato da operação de um controlador PID depende, entretanto, da precisão do projeto, podendo superar os efeitos citados na Tabela 6.1 como referência.

6.7 Controle por avanço de fase (LEAD)

A ação de controle por avanço de fase tem por fim compensar um eventual atraso de fase surgido dentro do sistema a ser controlado, por meio do redesenho do lugar das raízes a fim de se obterem os polos adequados em malha fechada. O uso da compensação LEAD provoca aumento no amortecimento do sistema, reduzindo-se os intervalos de subida e de estabilização, sem alteração no erro de regime permanente.

A função de transferência correspondente é:

$$G_C(s) = K_C \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{6.7}$$

Em suma, a ação de controle LEAD introduz um zero e um polo no sistema, melhorando o desempenho em regime transitório (tal como no controlador PD), à custa de um avanço na fase total do sistema.

6.8 Controle por atraso de fase (LAG)

A ação de controle por atraso de fase (LAG) traz melhora quanto ao erro em regime estacionário, acarretando, todavia, uma resposta mais lenta – maiores intervalos de subida e de estabilização. Por outro lado, o sistema se torna mais robusto à ação de ruídos espúrios.

A função de transferência correspondente é:

$$G_C(s) = K_C \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1}, \quad \beta > 1 \tag{6.8}$$

Em suma, a ação de controle LAG introduz um zero e um polo no sistema, melhorando o desempenho em regime permanente (tal como no controlador PI), à custa de um atraso na fase total do sistema.

6.9 Controle por avanço-atraso de fase (LEAD/LAG)

A ação de controle por avanço-atraso de fase (LEAD/LAG) tem por finalidade a obtenção da resposta rápida oferecida por compensadores LEAD, associada a uma diminuição do erro em regime permanente, garantida por compensadores LAG.

A função de transferência correspondente é:

$$G_C(s) = K_C \frac{\tau_1 s + 1}{\alpha \tau_1 s + 1} \frac{\tau_2 s + 1}{\beta \tau_2 s + 1}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \beta > 1, \quad \frac{1}{\tau_2} < \frac{1}{\tau_1} \tag{6.9}$$

Em suma, a ação de controle LEAD/LAG introduz dois zeros e dois polos no sistema, melhorando o desempenho tanto em regime transitório como em regime permanente (tal como no controlador PID).

Vamos recapitular?

Foram apresentados neste capítulo conceitos referentes às modalidades de controladores estudados em sistemas de controle: controlador P, controlador PI, controlador PD, controlador PID, compensador LEAD, compensador LAG, compensador LEAD/LAG.

O capítulo abordou, entre outros elementos, as características de cada tipo de controlador, listando as vantagens e desvantagens de cada um. Tais considerações são relevantes no sentido de se arbitrar, a partir das especificações de desempenho desejadas, qual estratégia de controle utilizar.

Agora é com você!

1) Dadas as funções de transferência dos seguintes sistemas (malha direta e malha reversa), traçar o LGR do sistema sem o controlador, testando se o ponto dado pertence ao LGR do sistema. A seguir, traçar o LGR com o sistema em série com um controlador PD com ganhos $K_P = 0,4$ e $K_d = 0,1$, testando se o ponto dado pertence ao LGR.

$$G(s) = \frac{1}{s+6,4} \qquad H(s) = \frac{1}{s^2} \qquad s = -0,3044 + 3,438i$$

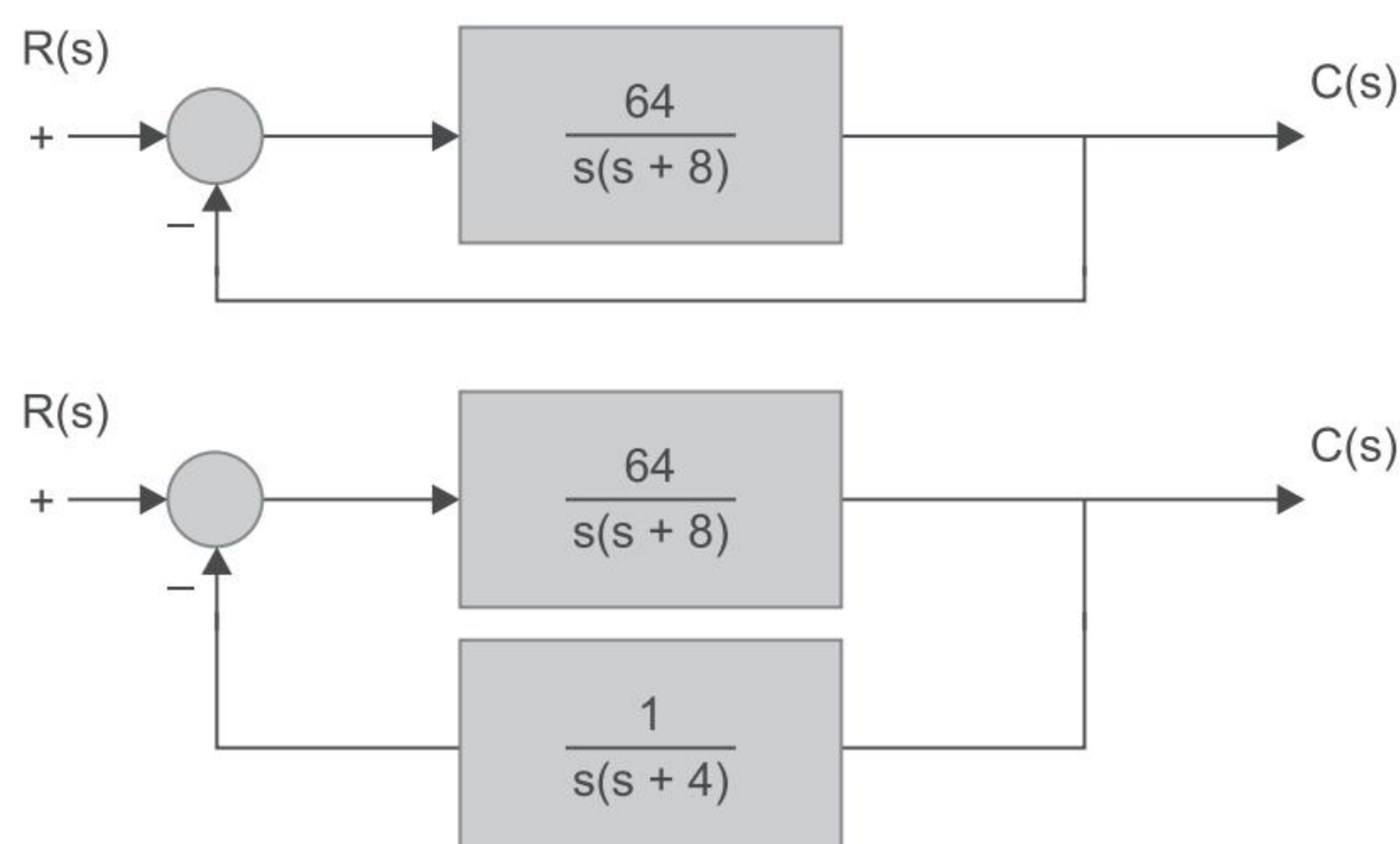
2) Considere o sistema em malha aberta $G(s) = \dfrac{K(s+1)(s+3)}{(s+2)(s+5)}$.

Verifique se o ponto $s = -2 + j3$ pertence ao LGR do sistema em questão para algum valor de K. Considere realimentação com ganho unitário.

3) Para os sistemas mostrados abaixo, aponte, qualitativamente, as diferenças no traçado do LGR de cada um.

R(s) + − $\frac{64}{s(s+8)}$ C(s)

R(s) + − $\frac{64}{s(s+8)}$ C(s) $\frac{1}{s(s+4)}$

7

Projeto de Controladores por Meio do Lugar das Raízes

Para começar

Este capítulo tem por objetivo apresentar os conceitos de projeto de controladores com base no traçado do Lugar das Raízes. O capítulo traz o detalhamento de projeto dos controladores já descritos no capítulo anterior, com uma nova forma de sua visualização por meio da aplicação da técnica do Lugar das Raízes.

As informações contidas neste capítulo trazem um complemento aos estudos apresentados no capítulo anterior, de forma a aperfeiçoar as regras de projeto já enunciadas.

7.1 Parâmetros do controlador

No projeto de controladores, são usualmente empregados parâmetros referentes a sistemas de segunda ordem, como já explicitado nos capítulos anteriores. Nesse sentido, são relevantes para projeto as especificações de fator de amortecimento ζ e frequência natural ω_n.

O polinômio característico de um sistema de segunda ordem é dado por

$$P(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2, \tag{7.1}$$

com polos em

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\ \omega_n \tag{7.2}$$

O projeto de controladores usualmente se restringe a um método em força bruta, em que se buscam atingir as especificações de desempenho requeridas em malha fechada iterativamente até que sejam obtidas, por meio da modificação dos parâmetros livres para ajuste ou mesmo da configuração do sistema.

Quando se deseja alterar o desempenho do sistema em regime transitório, o controlador aplicado deve inserir raízes no sistema global de modo que o lugar das raízes cruze o ponto especificado de desempenho. Em regime permanente, o controlador projetado deve operar sobre o ganho do sistema, promovendo poucas modificações no lugar das raízes original.

7.2 Projeto de controladores PD com base no LGR

Recordando o capítulo anterior, a função de transferência de um controlador PD é dada por:

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + K_d s = K_C(s+z) \tag{7.3}$$

Apontam-se os seguintes passos de projeto para controladores PD a partir da observação do LGR:

a) A partir das especificações de desempenho requeridas, obter a localização desejada dos polos dominantes de malha fechada.
b) Testar a viabilidade de uso de um controlador P puro.
c) Caso seja preciso utilizar um controlador PD, posicionar o novo zero de modo a satisfazer a condição de ângulo do LGR.
d) Obter o ganho total requerido a partir da condição de módulo.
e) Determinar o valor da constante de erro estacionário.
f) Caso tal constante não seja viável, alterar o tipo de controlador.
g) Simular o sistema com o controlador e observar o comportamento da resposta, ajustando de modo preciso os parâmetros K_C e z.

Em termos práticos, pode-se utilizar a regra empírica de projeto:

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_d s}{\left(1+\frac{s}{a}\right)}, \quad 3 < a < 10 \tag{7.4}$$

7.3 Projeto de controladores PI com base no LGR

A função de transferência de um controlador PI é dada por:

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_i}{s} = K_C\frac{s+z}{s} \tag{7.5}$$

Apontam-se os seguintes passos de projeto para controladores PI a partir da observação do LGR:

a) Localizar o polo situado na origem.

b) Determinar a localização do zero, de maneira a satisfazer a condição de ângulo do LGR.

c) Determinar o ganho total desejado, por meio da aplicação da condição de módulo.

d) Simular a resposta do sistema em malha fechada com o controlador atuando.

e) Caso o desempenho do controlador não seja satisfatório, realizar um ajuste fino dos parâmetros do controlador (K_C e z).

7.4 Projeto de controladores PID com base no LGR

A função de transferência de um controlador PID é dada por:

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{s^2 K_d + s K_P + K_i}{s} = K_C \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s} \tag{7.6}$$

Apontam-se os seguintes passos de projeto para controladores PID a partir da observação do LGR:

a) A partir das especificações de desempenho, obter a localização desejada dos polos dominantes de malha fechada.

b) Observar se é possível a obtenção de tais especificações com o uso de controladores P, PI ou PD.

c) Caso seja necessária de fato a utilização do PID, determinar a localização do polo na origem e dos zeros tal que a condição de ângulo do LGR seja satisfeita.

d) Determinar o ganho total do sistema, a partir da condição de módulo do LGR.

e) Simular a resposta com o uso do controlador projetado. Caso o desempenho do controlador não seja satisfatório, realizar um ajuste fino dos parâmetros do controlador (K_C, z_1 e z_2).

7.5 Projeto de controladores por avanço de fase com base no LGR

A função de transferência de um controlador por avanço de fase é dada por:

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_C \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = K_C \frac{s+z}{s+p}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{7.7}$$

Apontam-se os seguintes passos de projeto para controladores por avanço de fase a partir da observação do LGR:

a) A partir das especificações de desempenho, obter a localização desejada dos polos dominantes de malha fechada.

b) Observar se é possível a obtenção de tais especificações com o uso de um controlador do tipo P (proporcional).

c) Caso seja necessária de fato a utilização do avanço de fase, determinar a localização do zero do controlador, bem como posicionar o polo do controlador de tal forma que a condição de ângulo do LGR seja satisfeita.

d) Determinar o ganho total do sistema, a partir da condição de módulo do LGR.

e) Determinar o valor da constante de erro estacionário.

f) Se a constante não for adequada, realizar nova escolha de controlador e retornar ao passo (c).

g) Simular a resposta com o uso do controlador projetado. Caso o desempenho do controlador não seja satisfatório, realizar um ajuste fino dos parâmetros do controlador (K_C e z_1).

7.6 Projeto de controladores por atraso de fase com base no LGR

A função de transferência de um controlador por atraso de fase é dada por:

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_C}{\beta} \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} = K_C \frac{s+z}{s+p}, \ \beta > 1 \tag{7.8}$$

Apontam-se os seguintes passos de projeto para controladores por atraso de fase a partir da observação do LGR:

a) Obter o ganho de malha aberta por meio do uso da condição de módulo.

b) Determinar o valor da constante de erro estacionário.

c) Determinar o quanto deve ser elevada tal constante para que se atinjam as especificações de desempenho requeridas.

d) Obter o polo e o zero do controlador que produzem o devido aumento, sem alteração significativa do LGR original.

e) Simular a resposta com o uso do controlador projetado.

f) Se preciso for, remodelar as raízes do passo (d) até que se atinjam as especificações de desempenho requeridas.

7.7 Projeto de controladores por avanço-atraso de fase com base no LGR

A função de transferência de um controlador por avanço-atraso de fase é dada por:

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_C \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) \tag{7.9}$$

Apontam-se os seguintes passos de projeto para controladores por avanço-atraso de fase a partir da observação do LGR:

a) A partir das especificações de desempenho, obter a localização desejada dos polos dominantes de malha fechada.
b) Determinar a contribuição de ângulo necessária para a rede LEAD.
c) Determinar as constantes T_1 e γ por meio da condição de ângulo do LGR.
d) Determinar a constante K_C por meio da condição de módulo do LGR.
e) Determinar a constante β a partir das especificações de erro.
f) Determinar a constante T_2 de modo que a contribuição de ângulo da seção LAG se situe entre -5 e 0° (regra prática).
g) Simular a resposta com o uso do controlador projetado, procedendo ao ajuste fino dos parâmetros do controlador, se preciso for.

Vamos recapitular?

Foram apresentados neste capítulo conceitos referentes às modalidades de controladores estudados em sistemas de controle: controlador P, controlador PI, controlador PD, controlador PID, compensador LEAD, compensador LAG, compensador LEAD/LAG, desta vez sob o ponto de vista da construção de traçados de lugar das raízes.

O capítulo abordou, entre outros elementos, técnicas alternativas ao projeto de tais controladores, enunciando um conjunto de passos para tal, de modo a desfrutar da funcionalidade na construção do LGR.

Agora é com você!

1) Para os sistemas dados a seguir, projetar controladores que atendam às especificações de desempenho requeridas.

a) $G(s) = \dfrac{3}{2000(s^2 - 1{,}14)}$

Projetar um controlador PD para que $SS = 0{,}8$ e $\omega_n = 0{,}4\,rad/s$ em malha fechada.

b) $G(s) = \dfrac{100}{s(s+8)(s+24)}$

Projetar um controlador em atraso para que o fator de amortecimento dos polos dominantes se situe em $\zeta = 0{,}707$.

2) Para o sistema $G(s) = \dfrac{6/15}{s^2 + 6s + 9}$,

obtenha por simulação a resposta do sistema após a atuação de um controlador PI, com os parâmetros:

$K_C = 1,\ z = 0{,}01$

$K_C = 1,\ z = 0{,}3$

$K_C = 3,\ z = 0{,}3$

$K_C = 9,\ z = 0{,}9$

8

Projeto de Controladores no Domínio da Frequência - O Diagrama de Bode

Para começar

Este capítulo tem por objetivo apresentar os conceitos de projeto de controladores no domínio da frequência, que avalia a resposta de sistemas controlados no que se refere ao seu comportamento de módulo e fase a partir de respostas obtidas a entradas conhecidas, com ênfase no uso de Diagramas de Bode.

As informações contidas neste capítulo fornecem um subsídio diferenciado ao entendimento de sistemas de controle, apresentando uma abordagem (domínio) diferente na obtenção de especificações desejadas de projeto.

8.1 Introdução ao projeto de controladores

Quando se faz uso do termo “resposta em frequência” em Sistemas de Controle, busca-se avaliar a resposta em regime permanente de um sistema a uma entrada tipicamente senoidal, em que o sinal de entrada tem sua frequência natural variada a fim de se observar as características de resposta daquele sistema. Nesse sentido, as conclusões retiradas de tal análise são um tanto distintas das obtidas quando se faz uso de técnicas como a do Lugar das Raízes. A maior vantagem de métodos baseados na análise em frequência reside no fato de que os dados obtidos da simulação de plantas sob tal enfoque dispensam o uso de modelos matemáticos levantados para caracterizar tais processos, conquanto sejam úteis apenas na análise temporal desses processos.

Há uma variedade de métodos de controle de processos baseados na análise da resposta em frequência, concentrados na primeira metade do século passado, como os desenvolvidos por Nyquist, Bode e outros estudiosos da Teoria de Controle.

Amplie seus conhecimentos

Hendrik Wade Bode

O engenheiro Hendrik Wade Bode (1905-1982), funcionário da Bell Labs na década de 1930, trouxe valiosas contribuições à Teoria de Controle. De suas ideias, uma das mais relevantes para a análise da resposta de sistemas no domínio da frequência é o chamado Diagrama de Bode, conjunto de gráficos de módulo e de fase de um sistema sujeito a entradas com frequências variadas dentro de uma faixa de trabalho específica.

Wikipedia/Commons

Figura 8.1 - O engenheiro Hendrik Bode, idealizador dos Diagramas de Bode.

Como vantagem maior das técnicas de controle baseadas no domínio da frequência, aponta-se a possibilidade de que funções de transferência complexas possam ser experimentalmente modeladas, pelo uso de simulações. Não obstante, torna-se possível um melhor tratamento de condições em que se faça presente a contaminação por ruído, posto que a caracterização em frequência admite tal possibilidade.

A próxima seção destaca a implementação dos Diagramas de Bode como estratégia mais usual de controle baseada no domínio da frequência.

8.2 Diagramas de Bode

O Diagrama de Bode consiste em uma construção gráfica com duas curvas distintas: a primeira representa o logaritmo, na base 10, do módulo de uma função de transferência representada no domínio da frequência, ao passo que a segunda representa o ângulo de fase dessa mesma função de transferência. O gráfico de módulo, no Diagrama de Bode, é expresso em dB (decibel), posto que se traça uma curva logarítmica $20\log|G(j\omega)|$, em que $G(s)$é a função de transferência analisada, no domínio da transformada de Laplace.

Fique de olho!

A representação gráfica dos Diagramas de Bode, tanto para a curva de módulo quanto para a curva de fase, requer a representação do eixo das frequências em escala logarítmica. Assim, se você resolver esboçar os diagramas em papel, utilize papel monolog para os gráficos de fase, e papel dilog (ou log-log) para os gráficos de módulo.

A utilização de Diagramas de Bode encontra como principal vantagem o fato de que eventuais produtos aritméticos entre módulos podem ser convertidos em somas, em razão das propriedades dos logaritmos. Além disso, é possível representar as curvas por meio de aproximações assintóticas, bastante úteis à compreensão do comportamento dos sistemas analisados conforme a frequência.

A construção de Diagramas de Bode segue como premissa a separação da função de transferência analisada em fatores, que permitem a construção dos gráficos de forma simples e gradual. A combinação desses fatores por soma simples permite a representação de funções mais complexas, já que somar tais fatores corresponde, em termos logarítmicos, ao produto dos módulos. Vejamos, nas próximas subseções, quais os fatores que podem ser representados na construção de Diagramas de Bode.

8.2.1 Fator de ganho K

A representação de valores constantes na escala logarítmica consiste em representar valores maiores que a unidade como positivos, e valores menores que a unidade como negativos. Assim, uma constante K é representada na curva de módulo do Diagrama de Bode como uma reta horizontal com 20logKdB. Valores constantes possuem valores de fase nulos. Desse modo, uma constante apenas eleva ou diminui o nível da resposta de módulo de um valor de 20logKdB, não promovendo nenhuma alteração na fase. A Figura 8.2 representa a curva de módulo para uma constante K, conforme a construção definida pelo Diagrama de Bode.

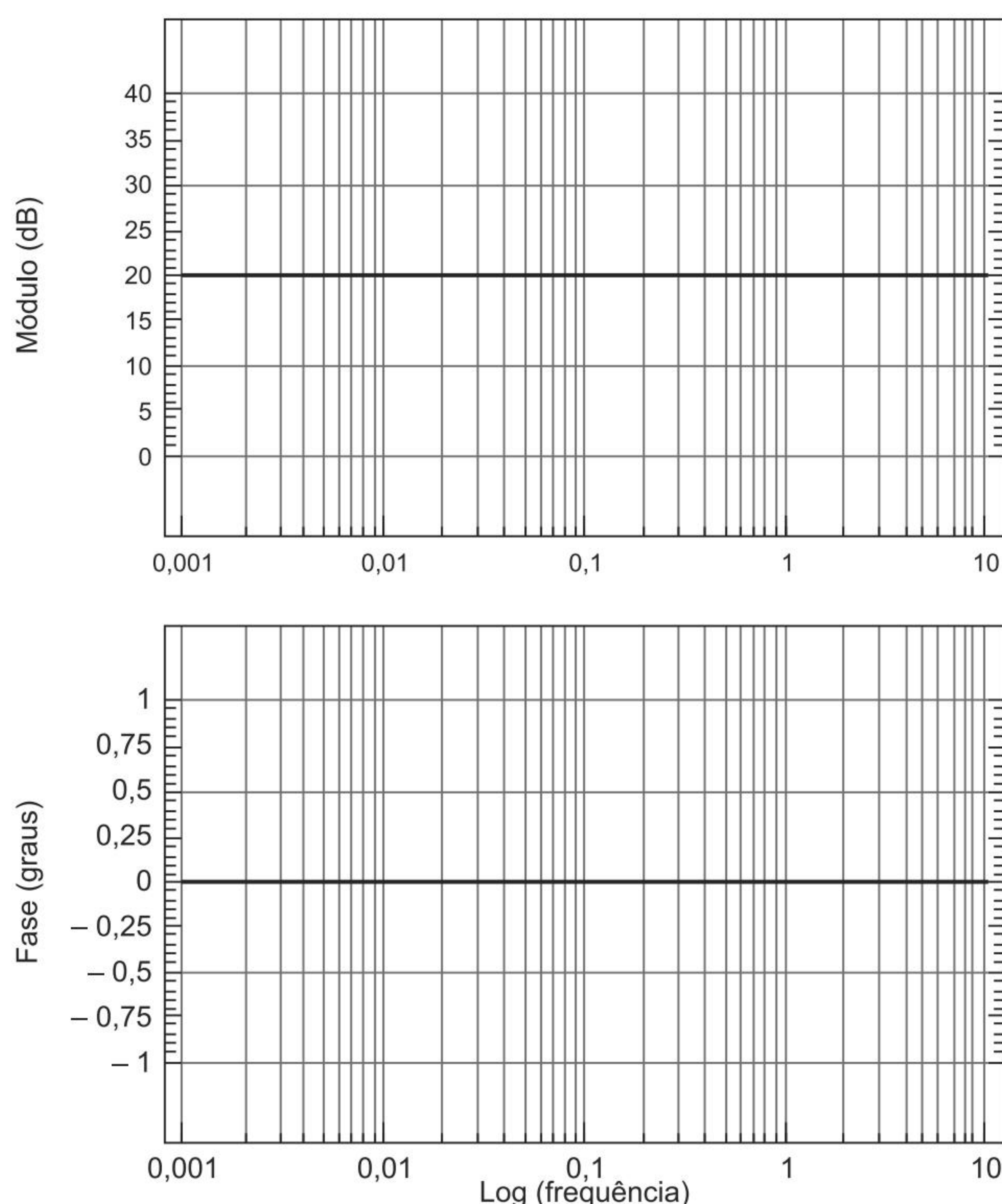



Figura 8.2 - Diagramas de Bode para um fator de ganho K = 10.

8.2.2 Fatores derivativo e integral $(j\omega)^{\pm 1}$

O fator $20\log|j\omega|$ é igual a $20\log(\omega)$dB, o que corresponde a uma reta inclinada em 20 dB/década na curva de módulo do Diagrama de Bode, bem como a um valor constante positivo na curva de fase do diagrama. Do mesmo modo, o fator $20\log|(j\omega)^{-1}|$equivale ao termo $-20\log(\omega)$, o que implica raciocinar, para a curva de módulo do Diagrama de Bode, uma reta inclinada em -20 dB/década, com um valor de constante negativo na curva de fase do diagrama. As Figuras 8.3 e 8.4 ilustram os Diagramas de Bode para os dois casos.

A potenciação do termo $(j\omega)^{\pm 1}$ (por exemplo, de um número n, tal que o fator se torne $(j\omega)^{\pm n}$, conduzirá a uma inclinação, respectivamente, de ±20ndB/década nas curvas de módulo, que igualmente se tornarão $\pm 20n\log(\omega)$.

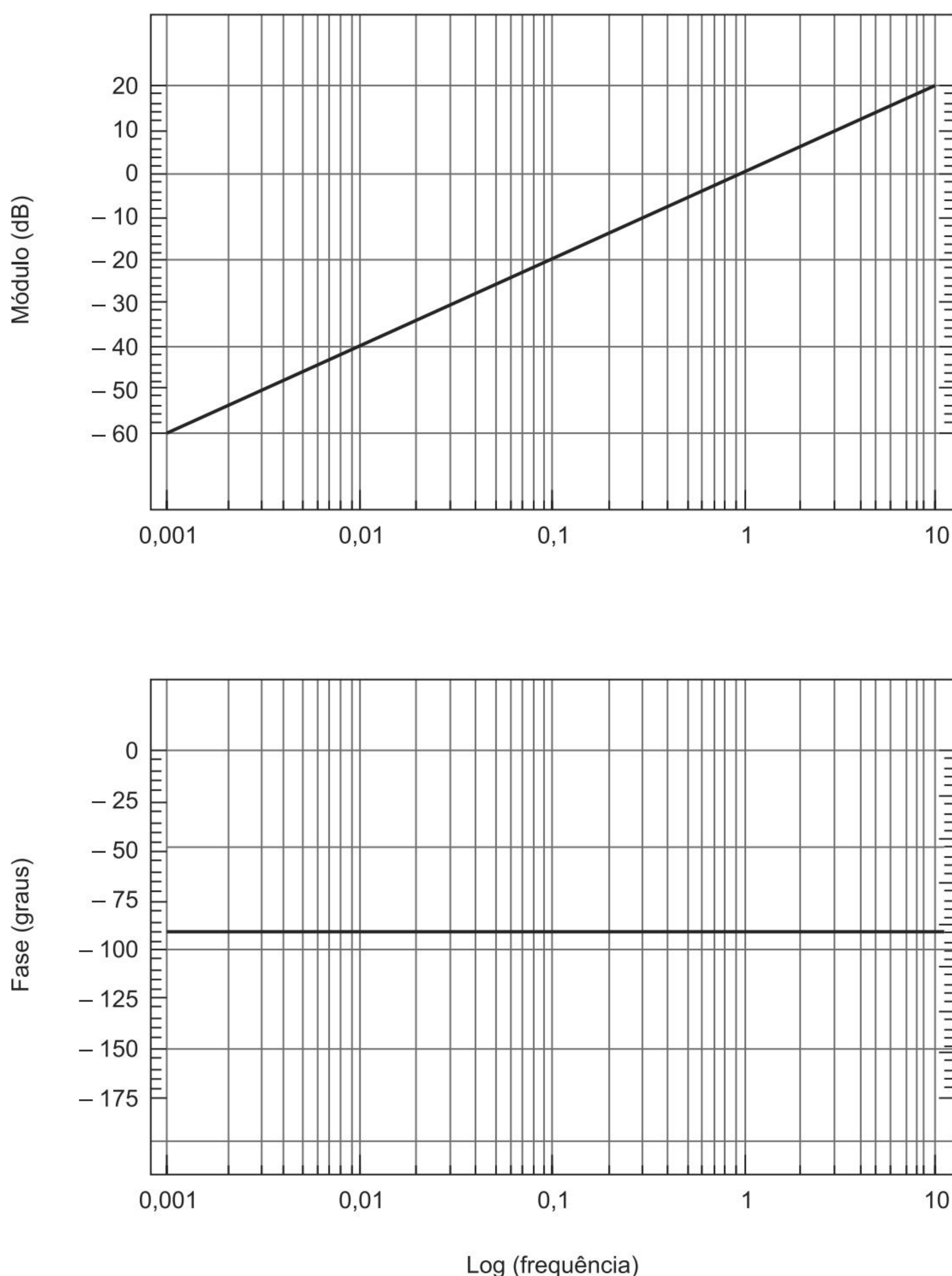



Figura 8.3 - Diagramas de Bode para um fator $j\omega$.

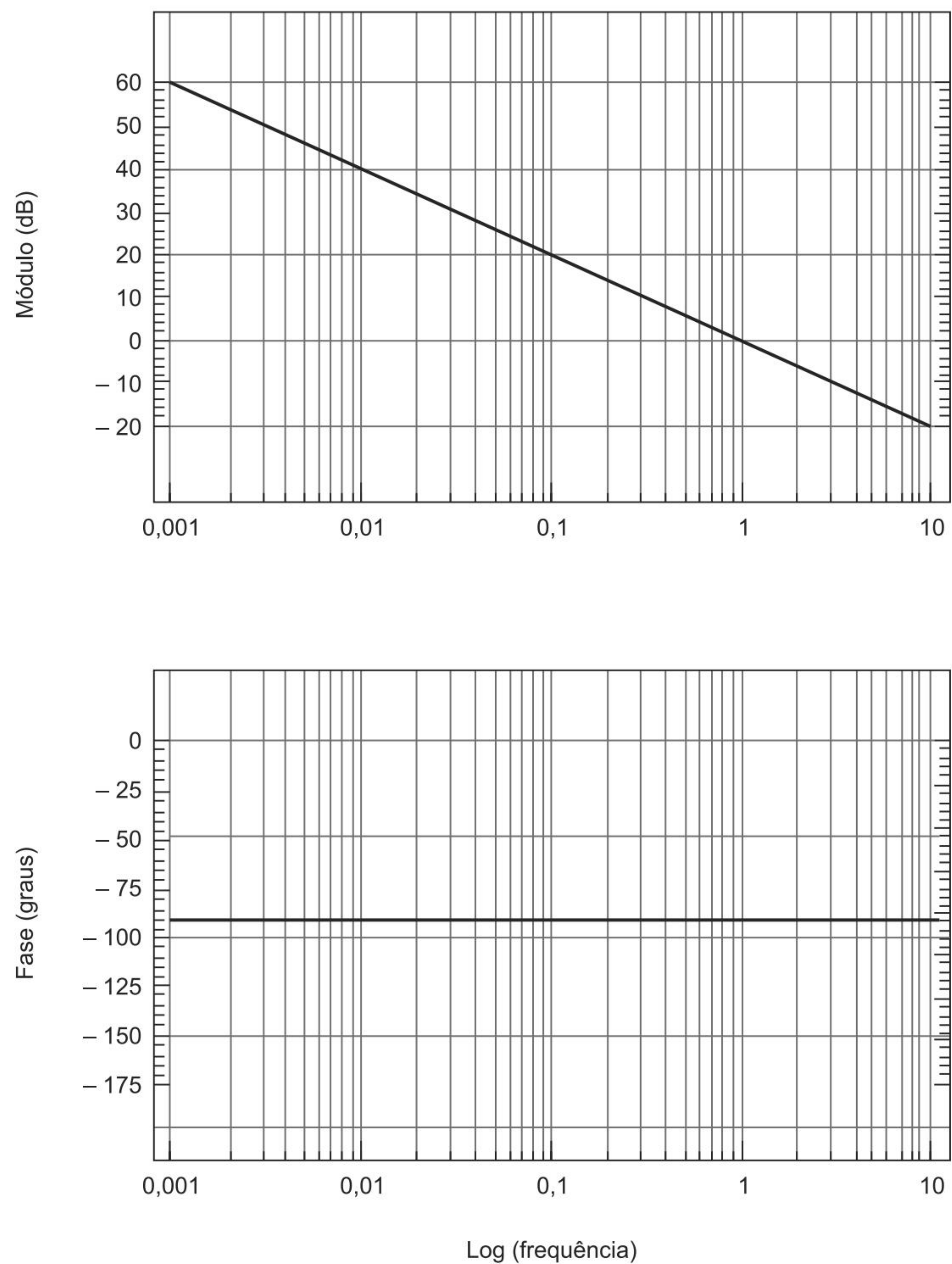



Figura 8.4 - Diagramas de Bode para um fator $(j\omega)^{-1}$.

A Figura 8.5 ilustra, de forma exemplificada, as curvas de módulo e fase para o termo $(j\omega)^{-3}$, em que se observa claramente uma inclinação de –60 dB/década para a curva de módulo.

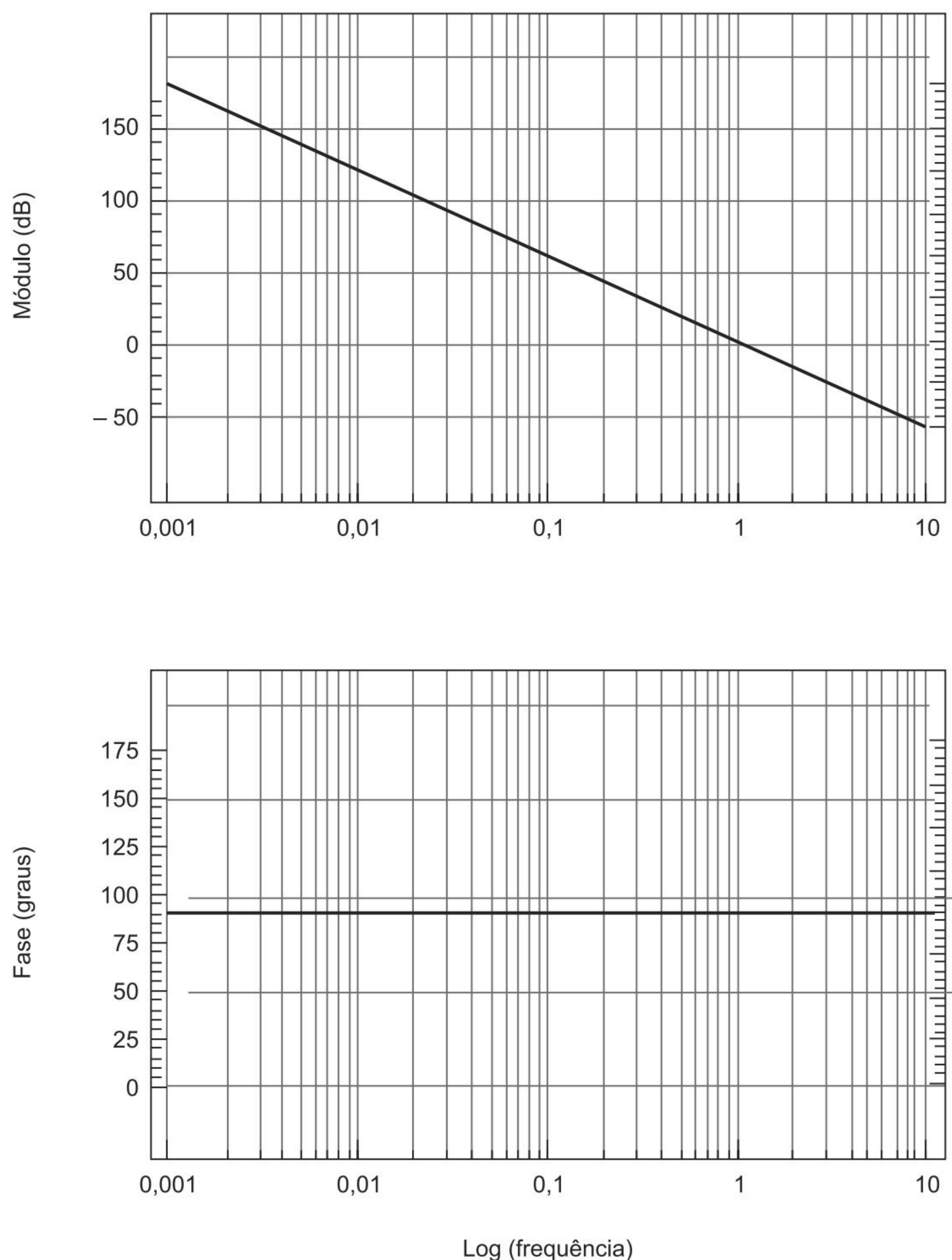



Figura 8.5 - Diagramas de Bode para um fator $(j\omega)^{-3}$.

8.2.3 Fatores de primeira ordem $(1+ j\omega T)^{\pm 1}$

O uso de fatores de primeira ordem $(1+ j\omega T)^{\pm 1}$ produz para as curvas de módulo do Diagrama de Bode, respectivamente, os termos recíprocos $\pm 20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = \pm 20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2}$ dB.

É interessante observar que tais termos possuem aproximações para frequências muito baixas ou muito altas. Quando a frequência se aproxima de zero, ou seja, quando $\omega \ll 1/T$, o termo de primeira ordem em dB pode ser escrito para a curva de módulo como $\pm 20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} \doteq \pm 20\log 1 = 0$ dB. Do mesmo modo, para frequências muito elevadas, ou seja, quando $\omega \gg 1/T$, o termo de primeira ordem em dB pode ser escrito para a curva de módulo como $\pm 20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} \doteq \pm 20\log \omega T$ dB. Assim, a representação logarítmica da curva de resposta em fre-

quência do fator de primeira ordem $(1+j\omega T)^{\pm 1}$ pode ser aproximada por duas retas assíntotas, a primeira delas constante em 0 dB e a segunda com inclinação de ± 20dB/década, respectivamente. A frequência em que o gráfico "abandona" as assíntotas é determinada "frequência de canto", sendo igual a $\omega = \frac{1}{T}$ rad/s para o caso em questão.

Para as curvas de fase referentes ao termo $(1+j\omega T)^{\pm 1}$, o valor da curva é representado pelos termos $\pm tg^{-1}\omega T$, respectivamente, que possuem igualmente valores peculiares nas frequências limítrofes. De fato, para $\omega = 0$ rad/s, $\pm tg^{-1}\omega T = 0$; para a frequência de canto, $\pm tg^{-1}\omega T = 45^o$; por fim, para frequências muito elevadas, $\pm tg^{-1}\omega T = 90^o$. Isso permite avaliar o comportamento das curvas de fase. As Figuras 8.6 e 8.7 ilustram o comportamento das curvas de módulo e fase para fatores de primeira ordem.

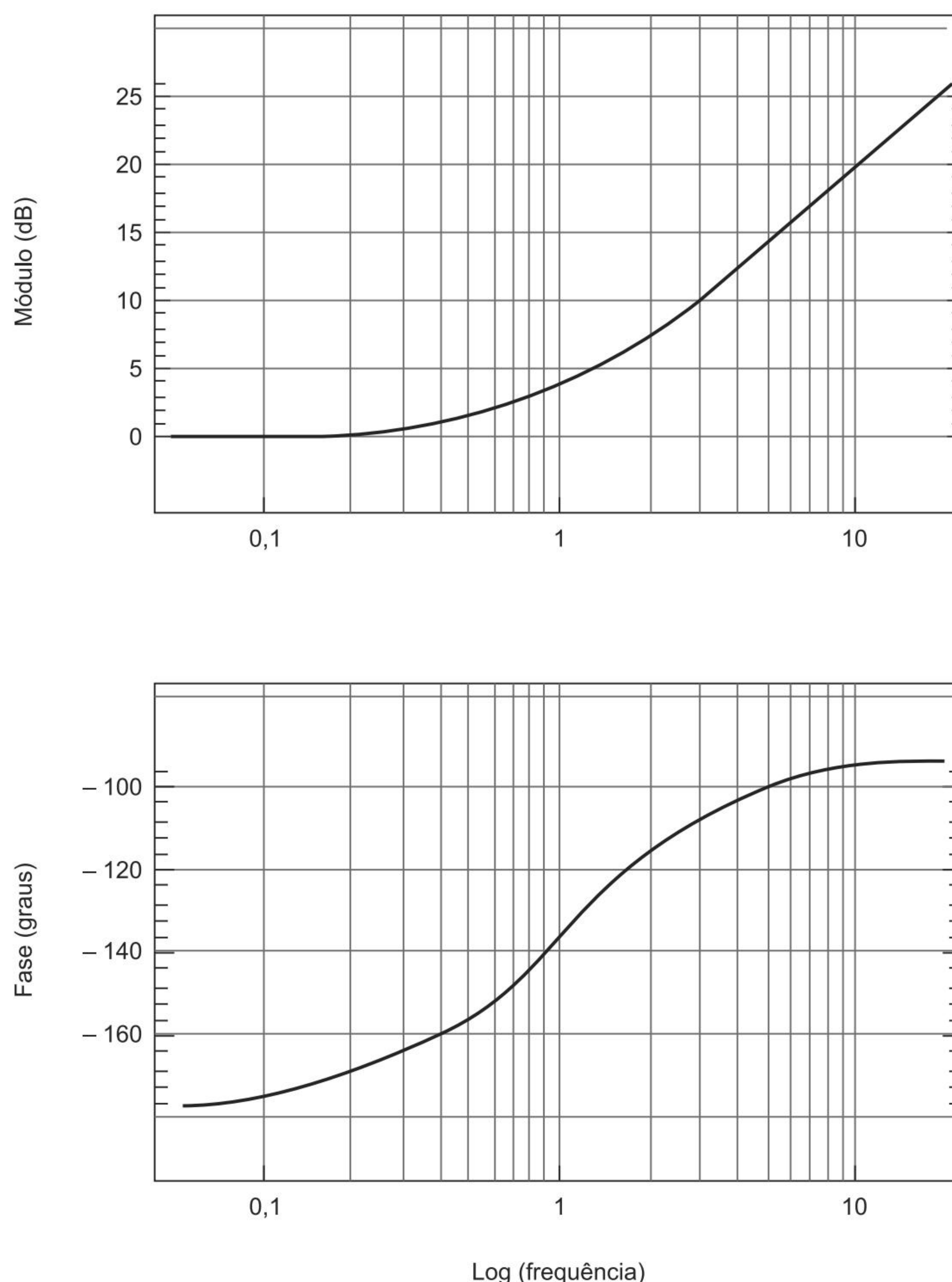



Figura 8.6 - Diagramas de Bode para um fator $(1+j\omega T)$, com T = 1*s*.

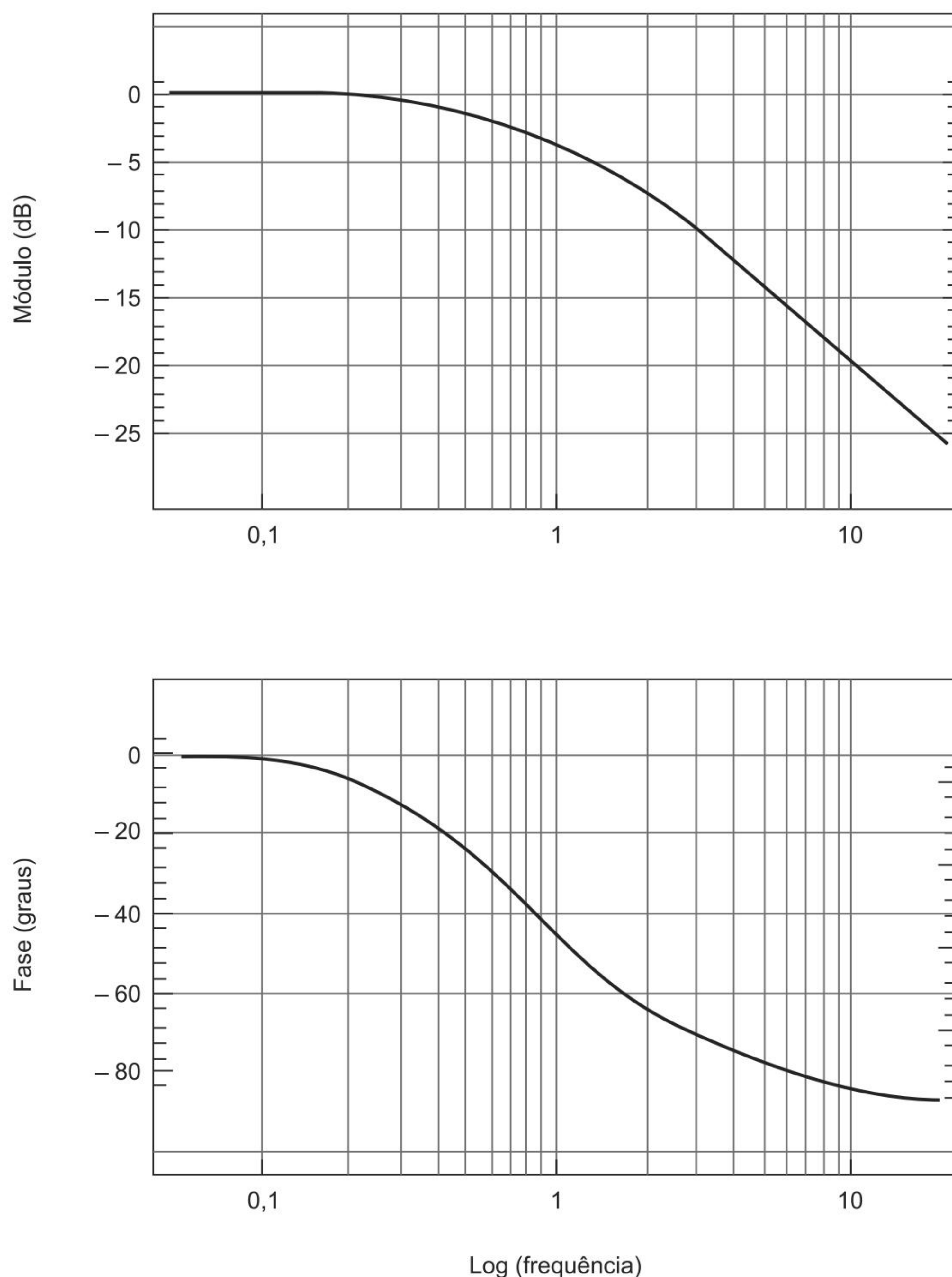



Figura 8.7 - Diagramas de Bode para um fator $(1+j\omega T)^{-1}$, com T = 1*s*.

8.2.4 Fatores quadráticos $\left[1+2\zeta(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2\right]^{\pm 1}$

Os termos quadráticos $\left[1+2\zeta(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2\right]^{\pm 1}$ podem ser representados, em termos de dB, como iguais a $\pm 20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$. Para baixas frequências (no caso, $\omega \ll \omega_n$), a curva de módulo em dB assume o valor de ± 20log1=0 dB. Para valores elevados de frequência, a curva

de módulo assume o valor de $\pm 20\log\frac{\omega^2}{\omega_n{}^2} = \pm 40\log\frac{\omega}{\omega_n}$ dB, com inclinação de ±40dB/década, respectivamente. É interessante observar que as assíntotas se cruzam em $\omega=\omega_n$, sendo esta, assim, a frequência de canto associada ao fator quadrático. As Figuras 8.8 e 8.9 ilustram o comportamento das curvas de módulo e fase para fatores quadráticos.

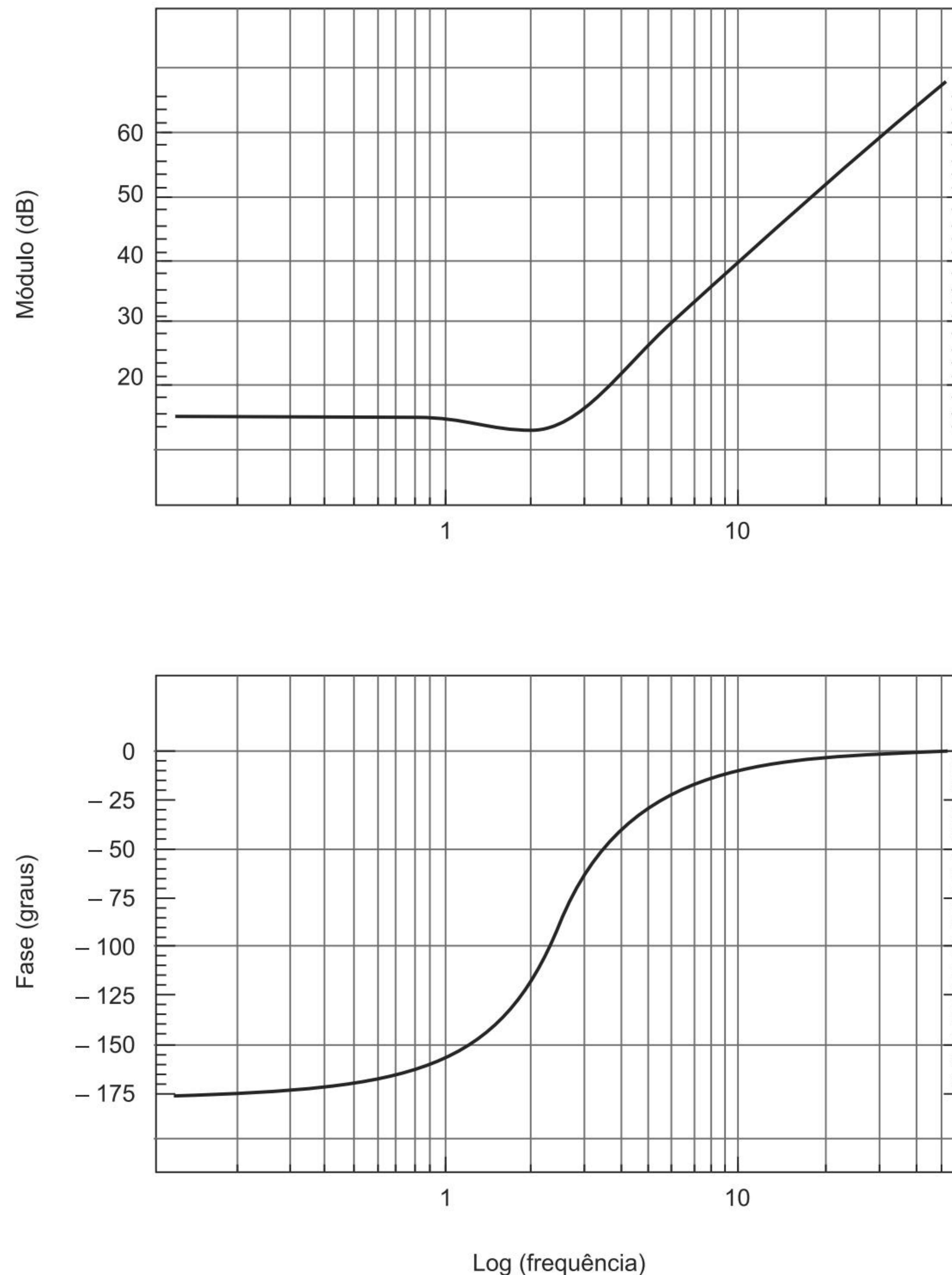



Figura 8.8 - Diagramas de Bode para um fator $1+2\zeta(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2$, com $\omega_n = \sqrt{6}\,\text{rad/s}$ e $\zeta = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

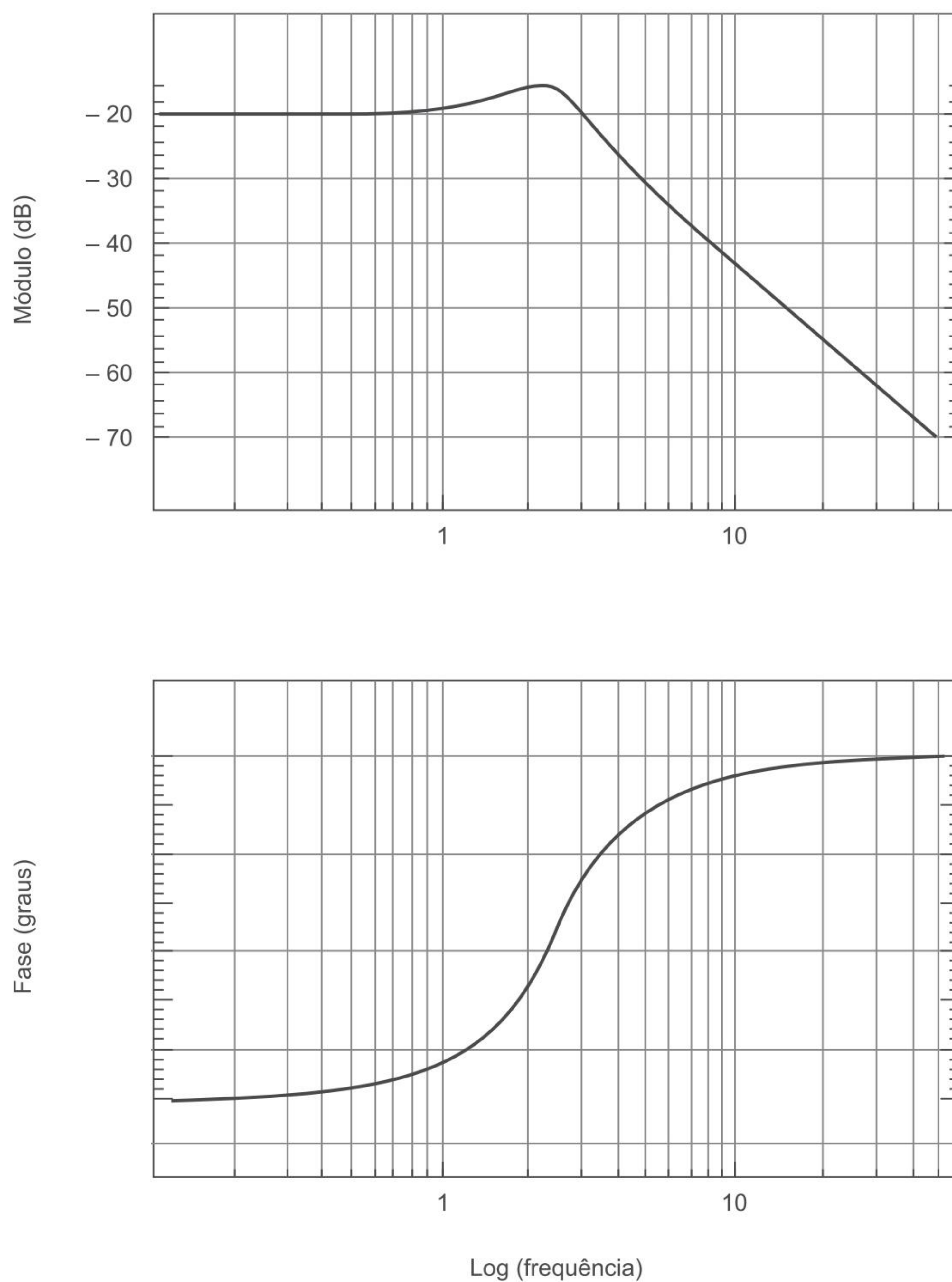



Figura 8.9 - Diagramas de Bode para um fator $\left[1+2\zeta(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2\right]^{-1}$, com $\omega_n=\sqrt{6}\,\text{rad/s}$ e $\zeta=\frac{1}{\sqrt{6}}$

Fique de olho!

Sistemas que não possuem polos nem zeros no semiplano lateral direito do plano complexo, ditos sistemas de fase mínima, têm função de transferência determinada de forma unívoca somente a partir da curva de módulo do Diagrama de Bode. Já sistemas que possuem polos e/ou zeros no semipleno lateral direito, ditos sistemas de fase não mínima, possuem função de transferência dependente da curva de fase do Diagrama de Bode.

Vamos recapitular?

Foram apresentados, neste capítulo, conceitos referentes às técnicas de controle de processos baseadas no domínio da frequência, em especial, a aplicação do Diagrama de Bode para análise da resposta de sistemas.

O capítulo abordou, entre outros elementos, a justificativa ao emprego do domínio da frequência como procedimento de controle alternativo às técnicas puramente temporais, enunciando um conjunto de passos para tal, de modo que se faça bom uso da funcionalidade da análise na frequência.

Agora é com você!

1) Esboce os gráficos de módulo e fase para as funções de transferência em malha aberta apresentadas a seguir. Depois, determine também a resposta de cada sistema a entradas impulso unitário e degrau unitário, identificando-os como de fase mínima ou de fase não mínima.

a) $G_C(s) = \dfrac{2}{s}$

b) $G_C(s) = \dfrac{3}{s+3}$

c) $G_C(s) = \dfrac{1}{s+4}$

d) $G_C(s) = 2$

e) $G_C(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+3}$

f) $G_C(s) = \dfrac{4}{s^2+9}$

g) $G_C(s) = \dfrac{4}{s^2-9}$

h) $G_C(s) = \dfrac{5}{s^2+4s+9}$

2) Para um sistema de segunda ordem em malha fechada, o que se pode afirmar quanto à resposta em módulo, à medida que se varia o fator de amortecimento ζ ? Apresente um exemplo numérico e faça considerações a respeito disso.

3) Obtenha o Diagrama de Bode da função de transferência da malha aberta $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(3s+2)}$. A partir do diagrama traçado, verifique se o sistema em malha fechada é estável com K = 3. Justifique sua resposta.

4) Considere um sistema com realimentação unitária cuja função de transferência de malha aberta seja dada por $G(s)H(s) = \frac{3}{s+0,8}$. Obtenha a resposta em regime permanente de tal sistema quando o mesmo for submetido aos sinais de entrada:

a) $x(t) = sen(3t)u(t)$

b) $x(t) = 2sen(t)u(t)$

9

Projeto de Controladores pelas Técnicas de Ziegler-Nichols

Para começar

Este capítulo tem por objetivo apresentar os conceitos de projeto de controladores com base na técnica de Ziegler-Nichols. Essa técnica corresponde a uma modificação da sintonia de controladores PID, por meio de uma heurística conhecida.

As informações contidas neste capítulo trazem um complemento ao projeto de controladores PID, fornecendo um novo modo de conduzir os estudos apresentados no capítulo anterior, de forma que se aperfeiçoem as regras de projeto já enunciadas.

9.1 A técnica de Ziegler-Nichols

A técnica (ou método) de Ziegler-Nichols corresponde a um método heurístico de sintonia de um controlador PID. Tal procedimento foi desenvolvido por John G. Ziegler e Nathaniel B. Nichols, em 1942, sendo até hoje visto como clássico na Teoria de Controle, mas ainda utilizado em sua essência (ainda que com algumas ligeiras modificações, baseadas em ensaios práticos, que aperfeiçoaram as fórmulas propostas por Ziegler e Nichols). Os dois métodos básicos de ajuste de Ziegler-Nichols (método da resposta ao degrau unitário e método da realimentação por relé) buscam a obtenção de uma mesma resposta preestabelecida para o sistema em malha fechada, distinguindo-se no que se refere à natureza da informação característica do processo abrangido por cada tipo de resposta. Uma vez obtidas as informações requeridas para cada método, faz-se uso de fórmulas simples para o cálculo de ganhos do controlador projetado.

Amplie seus conhecimentos

John G. Ziegler e Nathaniel B. Nichols estudaram, por volta da década de 1940, métodos de sintonia de controladores PID ainda antes do advento dos computadores pessoais. Embora não sejam, de fato, os formuladores do controle PID, são considerados, muitas vezes, os “pais” da teoria.

A justificativa para o uso de técnicas empíricas como as de Ziegler-Nichols é evidente. Quando o projetista tem à sua disposição a descrição (modelo) matemática da planta que deseja controlar, várias técnicas, como as apresentadas nos capítulos anteriores, podem ser aplicadas, com o intuito de se determinar os parâmetros do controlador, para se obter as especificações em regimes transitório e permanente em malha fechada (tal como bem-definido na Figura 9.1).

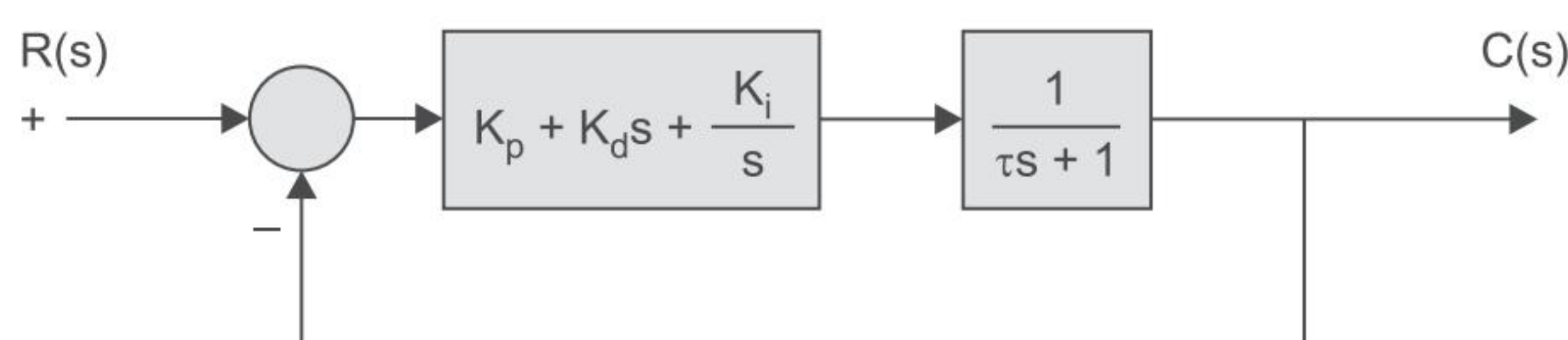



Figura 9.1 - Atuação de um controlador PID sobre uma planta bem definida.

Todavia, em alguns casos, a planta a ser controlada é de difícil caracterização, requerendo do projetista uma aproximação experimental para a sintonia do controlador projetado (conforme a Figura 9.2).

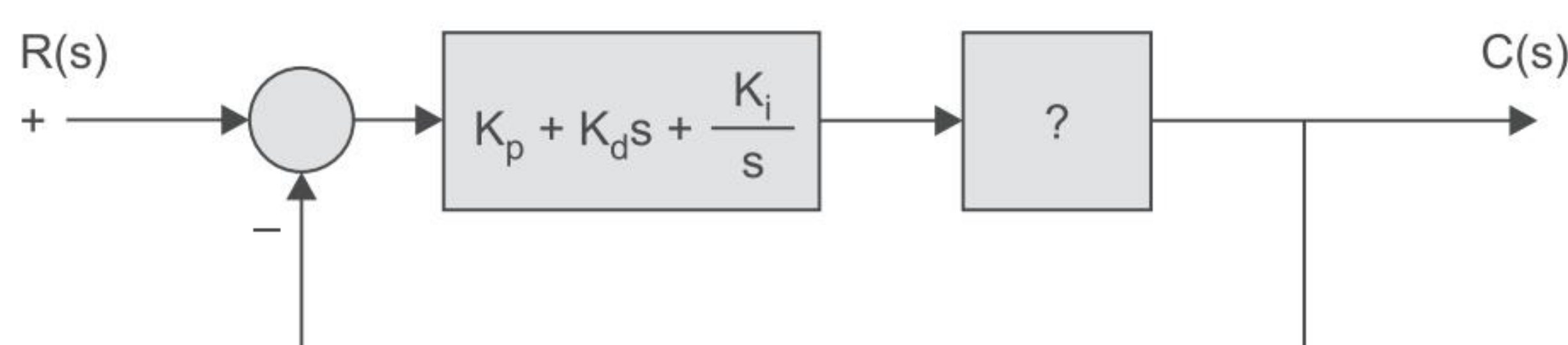



Figura 9.2 - Atuação de um controlador PID sobre uma planta não definida.

Na sintonia de um controlador PID, os métodos de Ziegler-Nichols buscam ajustar os parâmetros K_p, τ_i e τ_d a partir da observação da resposta a uma entrada conhecida (no método a ser abordado a seguir, um sinal degrau unitário) ou no ajuste do valor de ganho proporcional que assegure estabilidade marginal, para o caso de se utilizar somente um controlador proporcional isolado. O elenco de regras de Ziegler-Nichols, aplicável, sobretudo, na presença de sistemas a serem controlados que não apresentem uma descrição matemática precisa (muito embora possam também ser utilizados quando tais sistemas são bem-descritos), estabelece em si valores de K_p, τ_i e τ_d que assegurem estabilidade à planta a ser controlada. Entretanto, parâmetros como sobressinal máximo podem atingir valores indesejáveis, de modo que os valores sugeridos de parâmetros nas técnicas de Ziegler-Nichols podem servir como pontos de partida para o ajuste fino de tais parâmetros, nem sempre adequados à primeira iteração.

As seções seguintes descrevem cada método de Ziegler-Nichols, apresentando seus procedimentos e trazendo também exemplos de cada caso, para melhor compreensão dos passos de projeto.

9.2 Método da resposta ao degrau unitário

O método da resposta ao degrau unitário (também referenciado como método do domínio temporal) exige o conhecimento de duas grandezas que caracterizam a resposta ao degrau de uma planta. Esse método consiste em se obter experimentalmente a resposta da planta a ser controlada, a uma entrada do tipo degrau unitário, como ilustrado na Figura 9.3. A não ser pela presença de polos na origem ou de polos complexos conjugados dominantes, a resposta ao degrau unitário terá a conformação de uma curva em S, sendo tal curva ajustada a partir de dois parâmetros: o atraso aparente L e a constante de tempo T. Tais parâmetros são obtidos pelo traçado de uma reta tangente à curva de resposta em seu ponto de inflexão, que cruza a reta c(t) = K, ao que os parâmetros L e T são determinados, conforme ilustrado na Figura 9.3.

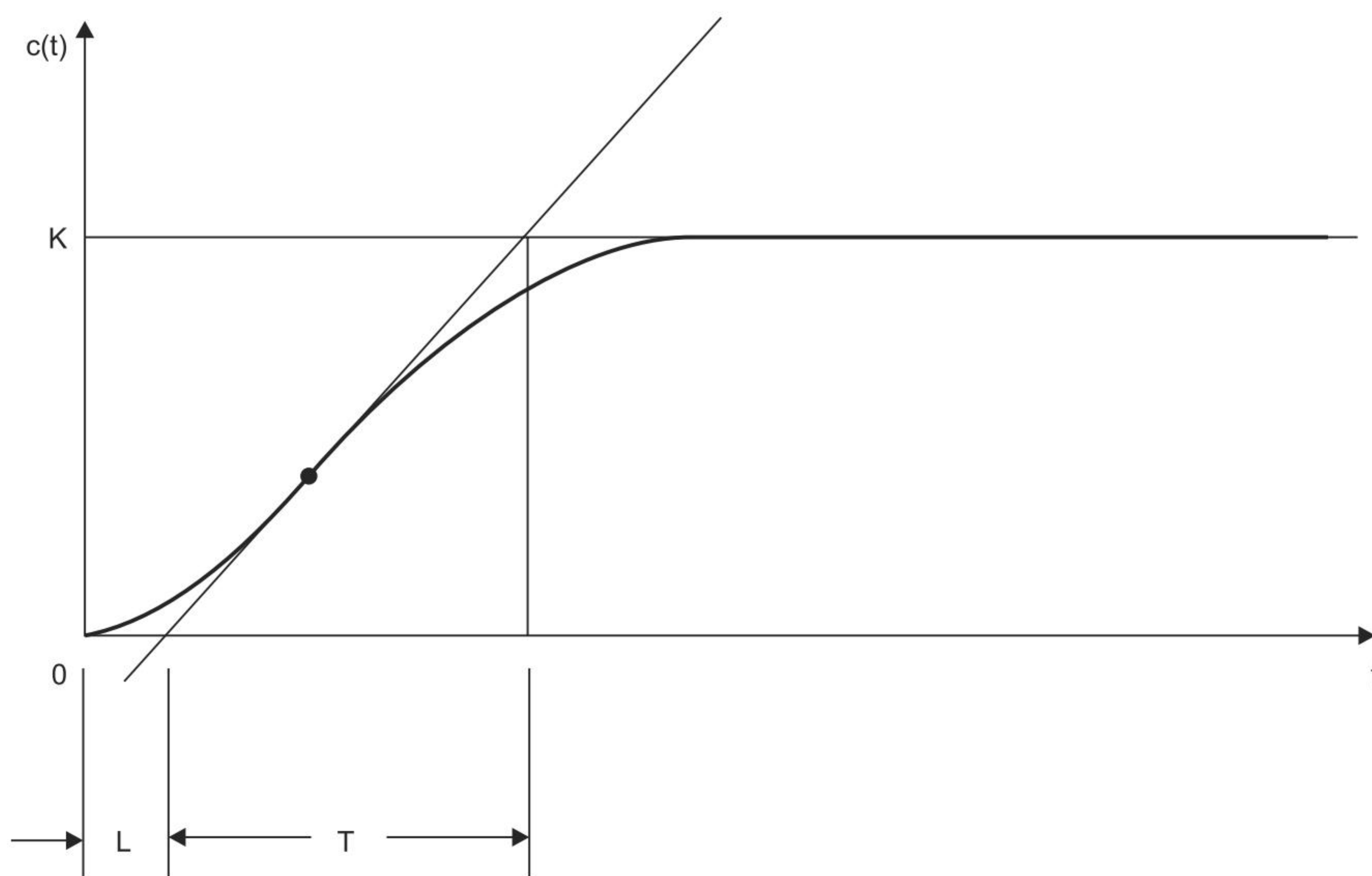



Figura 9.3 - Curva em S para o método de Ziegler-Nichols de resposta ao degrau unitário.

A função de transferência $\frac{C(s)}{U(s)}$ pode ser definida como um sistema de primeira ordem dotado de atraso de transporte, conforme a Equação 9.1.

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts+1} \tag{9.1}$$

A Tabela 9.1 apresenta as regras de sintonia de Ziegler-Nichols, para o caso de análise da resposta ao degrau da planta a ser controlada.

Tabela 9.1 - Regras de sintonia de Ziegler-Nichols, para o caso de análise da resposta ao degrau

Tipo de controlador	K_P	τ_i	τ_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0{,}9\frac{T}{L}$	$\frac{L}{0{,}3}$	0
PID	$1{,}2\frac{T}{L}$	2L	0,5L

Segundo a Tabela 9.1, o controlador PID sintonizado de acordo com as regras apresentadas pode ser expresso, em sua planta, por:

$$G_C(s) = K_P\left(1+\tau_d s+\frac{1}{\tau_i s}\right)$$

$$=1{,}2\frac{T}{L}\left(1+0{,}5Ls+\frac{1}{2Ls}\right) \tag{9.2}$$

$$=0{,}6T\frac{\left(s+\frac{1}{L}\right)^2}{s}$$

9.3 Método do período crítico

O método do período crítico (também referenciado como método da sintonia por relé) exige o conhecimento de duas grandezas características da resposta em frequência da planta analisadas. Neste método, definem-se arbitrariamente $\tau_i = \infty$ e $\tau_d = 0$, ajustando-se o valor do ganho proporcional K_P (de modo que o controlador PID passe a se comportar como um controlador proporcional puro, conforme ilustrado na Figura 9.4), até se obter o valor crítico K_{CR} (para o qual começa a surgir oscilação, com período crítico T_{CR}), de maneira que a função de transferência do controlador PID se reduza a:

$$G_C(s) = K_P\left(1+\tau_d s+\frac{1}{\tau_i s}\right)$$

$$=0{,}6K_{CR}\left(1+0{,}125T_{CR}s+\frac{1}{0{,}5T_{CR}s}\right) \tag{9.3}$$

$$=0{,}075K_{CR}T_{CR}\frac{\left(s+\frac{4}{T_{CR}}\right)^2}{s}$$

R(s)
+
−
K_p
planta
C(s)

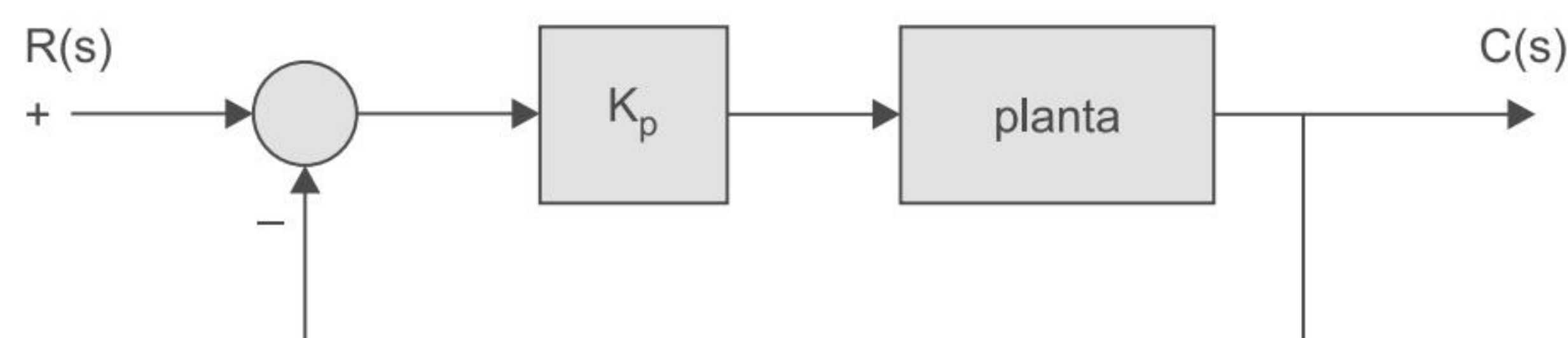



Figura 9.4 - Estratégia de controle para o método de Ziegler-Nichols do período crítico.

Deve-se ressaltar que o valor de K_{CR} pode ser obtido, caso o sistema a ser controlado possua planta matematicamente modelada, a partir da análise do Lugar das Raízes, bem como o período crítico de oscilação (T_{CR}). Tais valores são facilmente identificáveis nos gráficos de LGR, a partir das intersecções dos traçados com o eixo das frequências.

A Tabela 9.2 apresenta as regras de sintonia de Ziegler-Nichols, para o caso de análise de ganho e período críticos.

Tabela 9.2 - Regras de sintonia de Ziegler-Nichols, para o caso de análise de ganho e período críticos

Tipo de controlador	K_P	τ_i	τ_d
P	$0{,}5K_{CR}$	∞	0
PI	$0{,}45K_{CR}$	$\frac{1}{1{,}2}T_{CR}$	0
PID	$0{,}6K_{CR}$	$0{,}5T_{CR}$	$0{,}125T_{CR}$

Exercício Resolvido

1) Para o sistema de controle apresentado a seguir, aplique a regra de Ziegler-Nichols para projetar um controlador PID, de modo que o sobressinal máximo não exceda 25% do valor de regime permanente.

R(s)
+
−
$G_c(s)$
$\frac{1}{s(s+2)(s+3)}$
C(s)

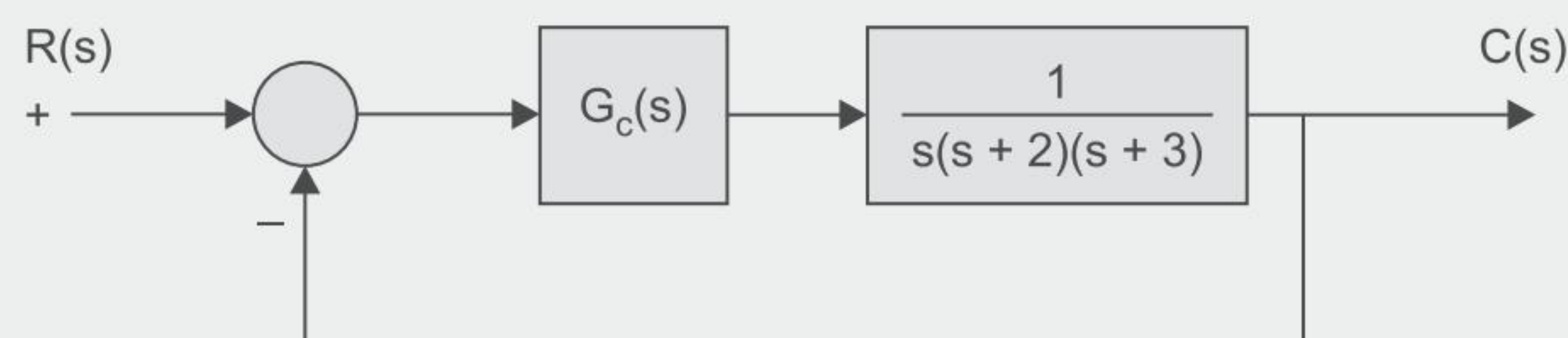



Figura 9.5 - Exemplo de sistema de controle.

Solução

O controlador PID é expresso na forma:

$$G_C(s) = K_P\left(1 + \tau_d s + \frac{1}{\tau_i s}\right).$$

Para determinação dos parâmetros K_P, $ô_d$ e $ô_i$, faz-se a escolha do segundo método de Ziegler-Nichols, já que a planta possui polos na origem. Fazendo $ô_d = 0$ e $ô_i = \infty$, a função em transferência de malha fechada se torna:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_P}{s(s+2)(s+3)+K_P}.$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_P}{s^3+5s^2+6s+K_P}$$

Utilizando o Critério de Routh-Horwitz, é possível a determinação do valor de K_P que gera oscilações não divergentes.

$$\begin{matrix} 1 & 6 \\ 5 & K_P \\ \frac{30-K_P}{5} & \\ K_P & \end{matrix}$$

O valor $K_P = 30$ conduz a um elemento nulo na primeira coluna da tabela de Routh, de modo que esse é o valor crítico de ganho K_{CR}. Isso conduz ao polinômio característico $s^3+5s^2+6s+30$. O valor da frequência das oscilações para o caso crítico (estabilidade marginal) é obtido pela substituição $s = j\omega$ no polinômio característico igualado a zero, o que resulta em:

$$(j\omega)^3+5(j\omega)^2+6(j\omega)+30=0 \therefore \omega=\sqrt{6}=2,45.$$

A partir desse valor de frequência, pode-se determinar o valor do período crítico de oscilação:

$$T_{CR} = \frac{2\pi}{\omega_{CR}} = 2,565s.$$

De posse dos valores de K_{CR} e de T_{CR}, obtém-se:

$$K_P = 0,6K_{CR} = 18$$

$$\tau_d = 0,125T_{CR} = 0,321s.$$

$$\tau_i = 0,5T_{CR} = 1,282s$$

Isso conduz, passo a passo, a:

$$G_C(s) = K_P\left(1 + \tau_d s + \frac{1}{\tau_i s}\right)$$

$$G_C(s) = 18\left(1 + 0,321s + \frac{1}{1,282s}\right)$$

$$G_C(s) = 18\left(\frac{1,603s^2 + 1,282s + 1}{1,282s}\right)$$

$$G_C(s) = 8,755\left(\frac{s^2 + 0,8s + 0,624}{s}\right).$$

O controlador PID possui 1 polo na origem e 2 zeros em s = −0,4 ± j0,681. A função de transferência em malha fechada é, portanto:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_C(s) \cdot \frac{1}{s(s+2)(s+3)}}{1 + G_C(s) \cdot \frac{1}{s(s+2)(s+3)}}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{8,755\left(\frac{s^2 + 0,8s + 0,624}{s^4 + 5s^3 + 6s^2}\right)}{1 + 8,755\left(\frac{s^2 + 0,8s + 0,624}{s^4 + 5s^3 + 6s^2}\right)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{8,755(s^2 + 0,8s + 0,624)}{s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 8,755(s^2 + 0,8s + 0,624)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{8,755s^2 + 7,004s + 5,463}{s^4 + 5s^3 + 14,755s^2 + 7,004s + 5,463}$$

A resposta de tal função de transferência ao degrau unitário é ilustrada na Figura 9.6.

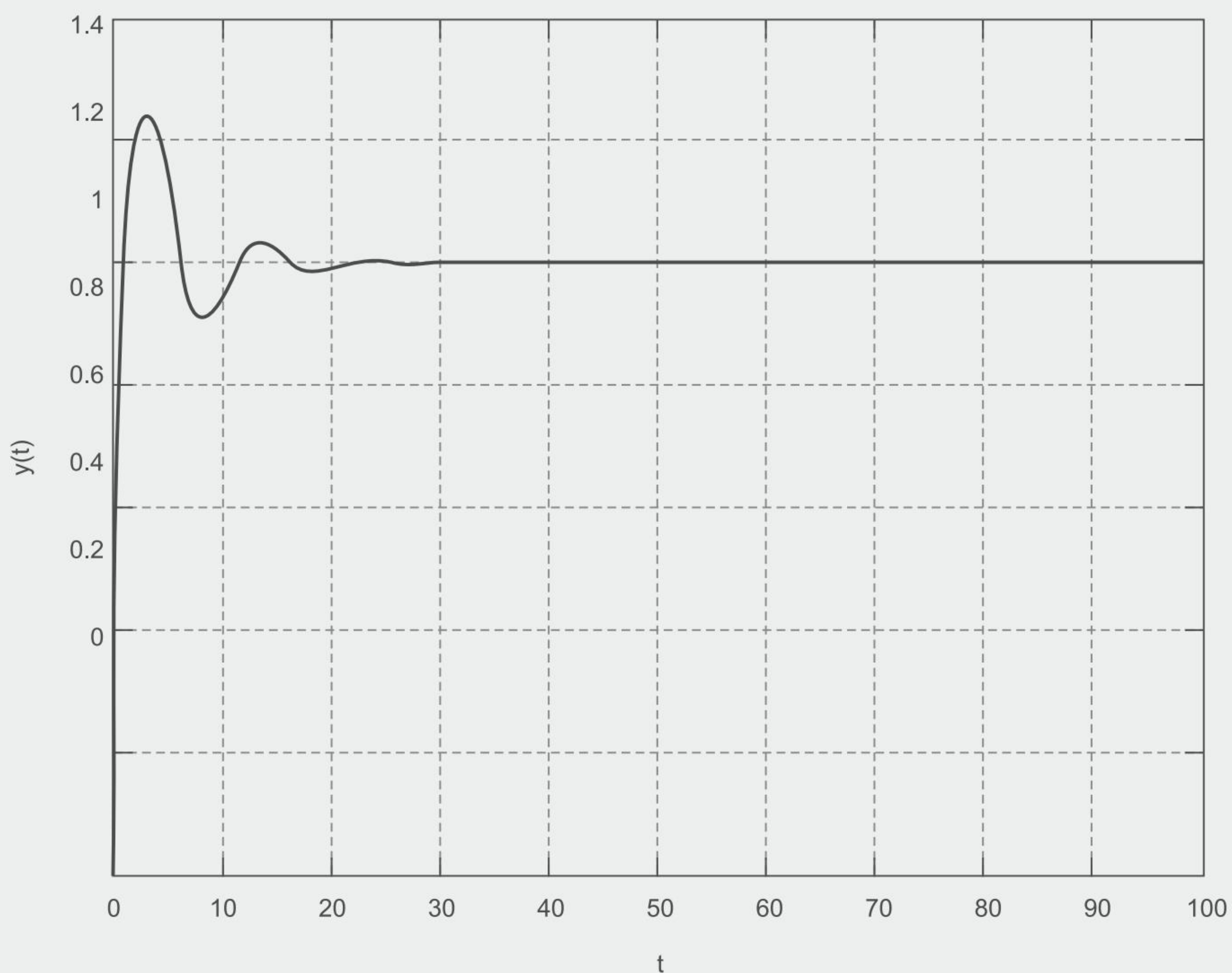



Figura 9.6 - Resposta ao degrau unitário para o sistema analisado.

Uma vez que as especificações de sobressinal são atendidas (seu valor é aproximadamente 23,7% superior ao valor de regime), poder-se-ia tornar o sistema mais veloz alterando-se a posição dos zeros do controlador PID. Todavia, sendo o sobressinal a especificação única a ser atendida, o controlador projetado não necessita de ajustes finos em seus parâmetros.

Fique de olho!

O ajuste fino dos parâmetros após os valores inicias sugeridos pelo método de Ziegler-Nichols não é incomum. Todavia, há de se ter cuidado com os valores que se tomem para K_P, τ_i e τ_d, posto que não somente o sobressinal é afetado, mas também os valores de tempo de subida e de acomodação. Não é também proibitivo se alterar a localização de zeros no controlador PID projetado, atentando-se para o cuidado de não se descumprirem as especificações requeridas no projeto.

Vamos recapitular?

Foram apresentados, neste capítulo, conceitos referentes aos métodos de Ziegler-Nichols para sintonia fina de controladores PID. Fazendo uso de regras empíricas de fácil manipulação, o emprego de tais técnicas permite que sistemas de difícil modelagem matemática possam ter especificações de desempenho atendidas, na medida em que se faz uso de tabelas de aplicação imediata.

O capítulo abordou, entre outros elementos, os dois métodos de aplicação de Ziegler-Nichols (método da resposta ao degrau unitário e método do período crítico), destacando em que situações são aplicáveis.

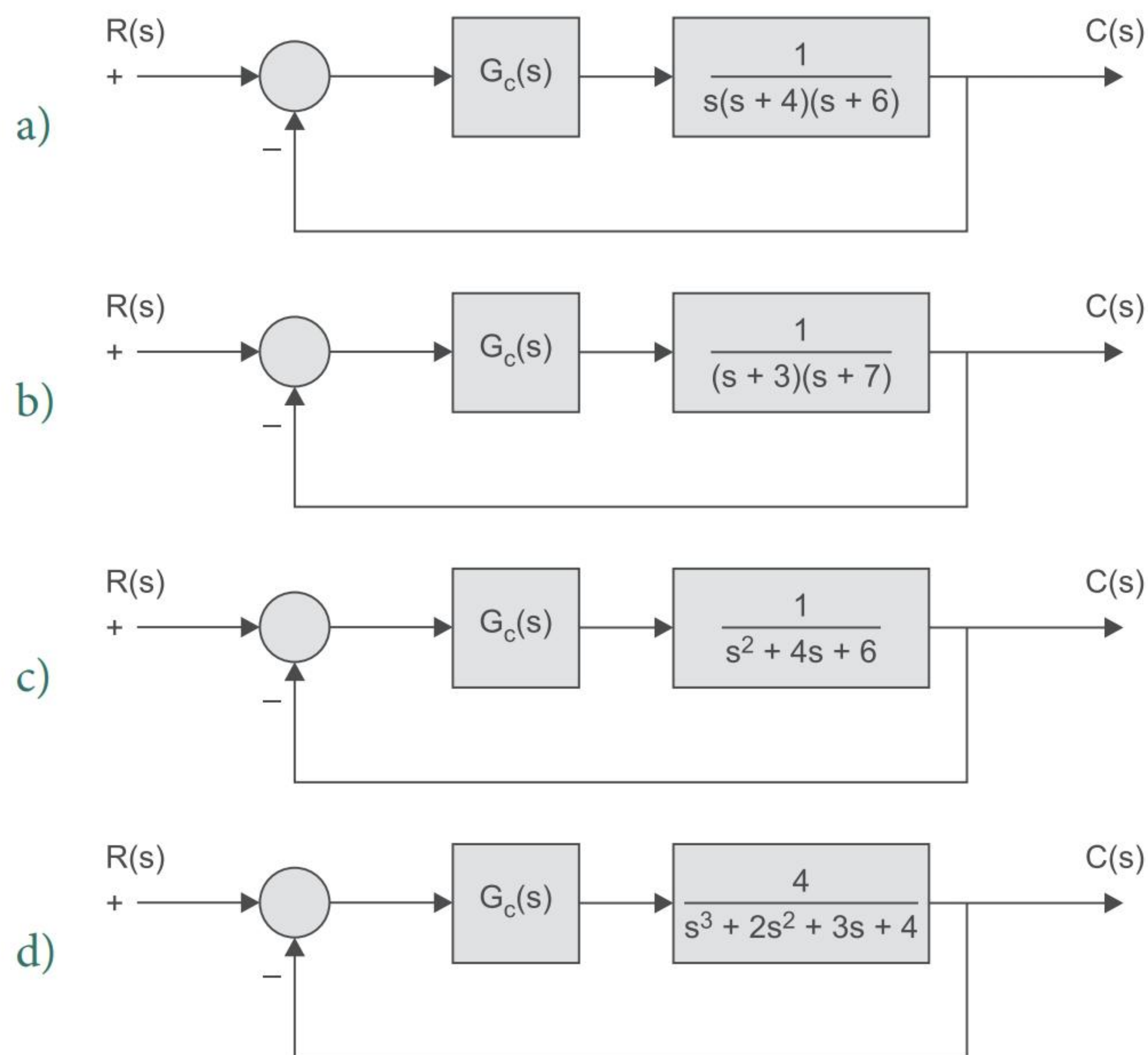
Agora é com você!

1) Para os sistemas apresentados a seguir, projetar controladores PID $G_C(s)$ baseados nas regras de Ziegler-Nichols, de modo que se atenda à especificação de sobressinal não superior a 20%. Se preciso for, faça ajustes finos nos parâmetros calculados. Utilize o método de Ziegler-Nichols (resposta ao degrau ou período crítico) que mais se aplique à configuração de polos da planta apresentada no problema de controle.

a) Sistema em malha fechada com realimentação unitária negativa: R(s) → $G_c(s)$ → $\frac{1}{s(s+4)(s+6)}$ → C(s)

b) Sistema em malha fechada com realimentação unitária negativa: R(s) → $G_c(s)$ → $\frac{1}{(s+3)(s+7)}$ → C(s)

c) Sistema em malha fechada com realimentação unitária negativa: R(s) → $G_c(s)$ → $\frac{1}{s^2+4s+6}$ → C(s)

d) Sistema em malha fechada com realimentação unitária negativa: R(s) → $G_c(s)$ → $\frac{4}{s^3+2s^2+3s+4}$ → C(s)

10

Análise de Controladores no Espaço de Estados

Para começar

Este capítulo tem por objetivo apresentar os preceitos de análise de sistemas de controle no espaço de estado, tópico bem-fundamentado na Teoria de Controle Moderno, sem adentrar de forma específica o projeto de sistemas baseado em tal abordagem. Diferentemente de técnicas clássicas, que buscam relacionar saídas e entradas de sistemas, o controle moderno parte do pressuposto de que um sistema pode ser representado por uma única equação matricial de primeira ordem, agrupando todas as equações diferenciais relacionadas ao sistema em questão e fornecendo um modo compacto de se modelar e analisar sistemas com múltiplas entradas e saídas. O projeto de controladores no espaço de estados é brevemente referenciado ao final do capítulo, na sugestão de técnica de alocação de polos, merecendo maior atenção em outras fontes bibliográficas que descrevem a teoria específica de Controle Moderno.

10.1 Sistemas em espaço de estados

Na representação de sistemas em espaço de estados, toma-se primeiramente como base uma equação que estabeleça relação entre saídas e entradas correspondentes a tais sistemas. Seja um sistema descrito pela equação diferencial

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + a_2 \overset{(n-2)}{y} + \ldots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + b_2 \overset{(n-2)}{u} + \ldots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u, \qquad (10.1)$$

sendo y o sinal de saída e u o sinal de entrada. Tal equação pode ser representada no domínio da transformada de Laplace por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}. \quad (10.2)$$

A notação estabelecida na Equação 10.2 pode ser então representada por diferentes formas no espaço de estados, listadas a seguir.

10.2 Representação de funções de transferência de sistemas no espaço de estados

10.2.1 Forma canônica controlável

A Equação 10.2 é representada na forma canônica controlável da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (10.3)$$

$$y = \left[b_n - a_n b_0 \mid b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \mid \cdots \mid b_1 - a_1 b_0 \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (10.4)$$

As representações utilizadas nas Equações 10.3 (equação de estados de entrada) e 10.4 (equação de estados de saída) são úteis no projeto de sistemas de controle no espaço de estados baseado na alocação de polos, como brevemente enunciado neste capítulo.

10.2.2 Forma canônica observável

A Equação 10.2 é representada na forma canônica observável por meio das seguintes equações de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u \tag{10.5}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{10.6}$$

Na Equação de entrada 10.5, a matriz de estados multiplicativa do vetor de entrada x é a matriz transposta da mesma utilizada na Equação de entrada 10.3.

10.2.3 Forma canônica diagonal

A forma canônica diagonal assume que os polos da função de transferência expressa na Equação 10.2 são todos distintos, no que se reescreve a Equação 10.2 como:

$$\begin{gathered} \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1} s + b_n}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)} \\ \frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \ldots + \frac{c_n}{s+p_n} \end{gathered} \tag{10.7}$$

A Equação 10.7 é representada na forma canônica diagonal por meio das seguintes equações de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \\ & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{10.8}$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{10.9}$$

10.2.4 Forma canônica de Jordan

A forma canônica diagonal, quando o sistema representado em questão apresenta raízes múltiplas, necessita de uma pequena modificação, caso em que é denominada forma canônica de Jordan. Consideremos agora a Equação 10.7 como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1} s + b_n}{(s+p_1)^m (s+p_{m+1})(s+p_{m+2})\ldots(s+p_n)}$$

(10.10)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{(s+p_1)^m} + \frac{c_2}{(s+p_1)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_m}{s+p_1} + \frac{c_{m+1}}{s+p_{m+1}} + \ldots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

Amplie seus conhecimentos

Camille Jordan

O matemático Camille Jordan (1838-1922) iniciou seus estudos em matemática aplicada em 1869, motivado pelo interesse em estruturas cristalinas. Particularmente, Jordan tinha gosto peculiar por aprofundar seu conhecimento em transformações euclidianas tridimensionais. Intensificando suas pesquisas em Teoria de Grupos, Jordan tornou-se um nome de destaque na formulação de subgrupos finitos de um grupo linear de matrizes quadradas no espaço dos números complexos. Seu nome é lembrado em definitivo, porém, quando se associa a ele a prova de que uma curva fechada divide um plano em exatas duas regiões (o chamado teorema da curva de Jordan).

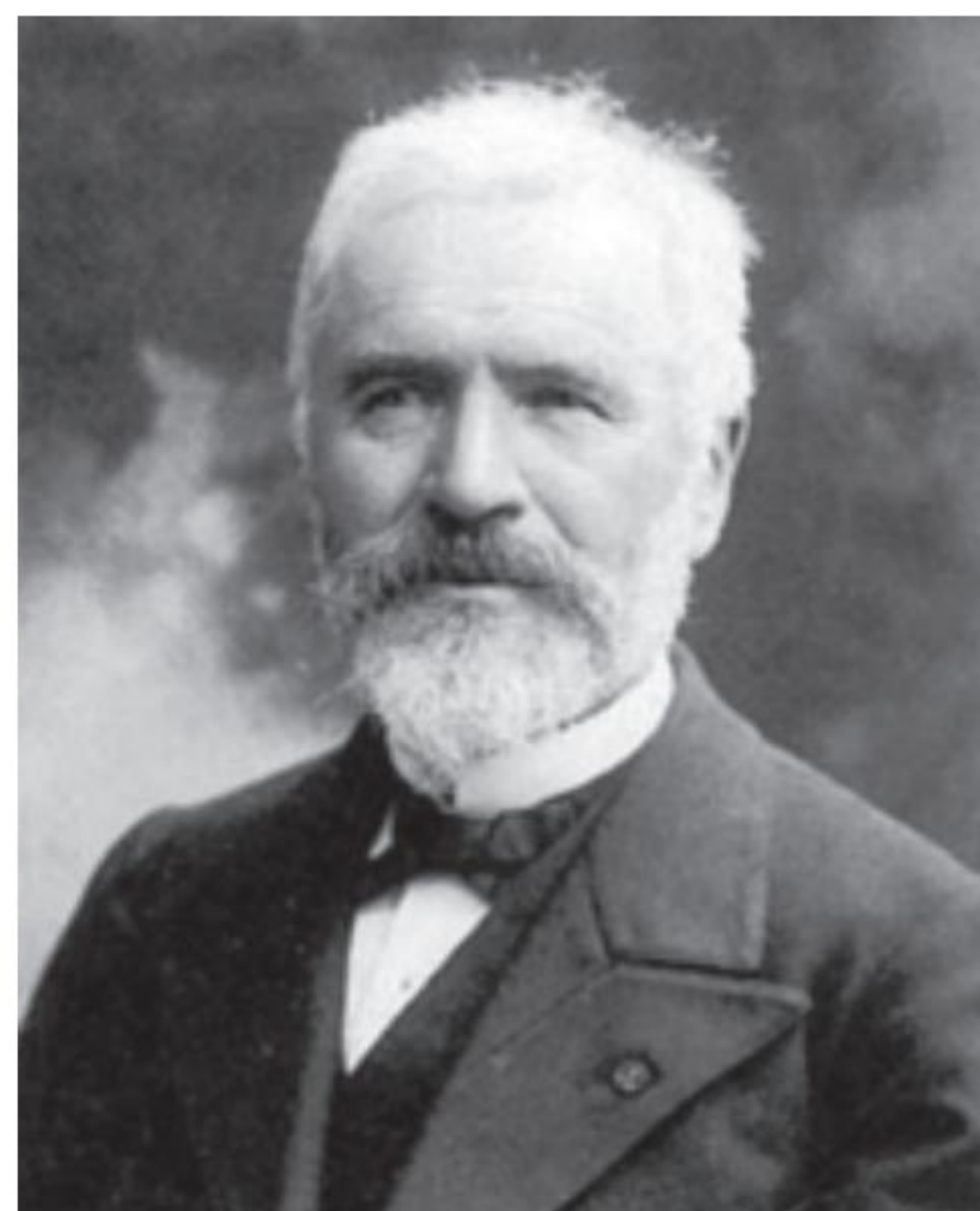
Em Controle, Jordan trouxe sua contribuição em 1870, quando publicou um teorema sobre matrizes quadradas que provê a base de comprovação de outros teoremas simples e que permite a representação de vários sistemas lineares na forma de equações matriciais, independentemente da multiplicidade de polos.

Wikimedia/Commons

Figura 10.1 - O matemático Camille Jordan, que grande contribuição trouxe à análise de sistemas no espaço de estados.

As equações de entrada e de saída para a forma canônica diagonal, representadas, respectivamente, pelas Equações 10.8 e 10.9, tornam-se:

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -p_{m+1} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad (10.11)
$$

$$
y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \qquad (10.12)
$$

Observa-se que as Equações 10.10 e 10.12 permanecem idênticas, posto que a forma canônica de Jordan provoca, substancialmente, uma alteração na representação dos polos do sistema. A técnica nada mais é do que uma forma alternativa de se representar uma matriz ou operador linear por meio de outra matriz semelhante à original, sendo quase uma matriz diagonal.

A contribuição efetiva da forma canônica de Jordan reside no fato de que seu uso permite que se extraiam informações sobre a transformação aplicada a sinais de entrada com facilidade, lembrando que é necessário que se conheça a multiplicidade algébrica de cada um dos autovalores associados para que seja efetiva a utilização da forma canônica de Jordan.

1) Para o sistema dado por $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{s^2+7s+12}$, obtenha sua representação no espaço de estados, nas formas canônica controlável, observável e diagonal.

Utilizando as equações anteriores, podemos escrever:

a) Forma canônica controlável

A equação de estado de entrada dessa forma canônica é dada por:

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u
$$

Observando que $a_1 = 7$ e $a_2 = 12$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

A equação de estados de saída é definida por:

$$y = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \mid b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \mid \cdots \mid b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_2 - a_2 b_0 & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + b_0 u$$

Considerando que se tem os valores obtidos dos coeficientes, $a_1 = 7$, $a_2 = 12$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, escreve-se:

$$y = \begin{bmatrix} -24 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

b) Forma canônica observável

A equação de estado de entrada dessa forma canônica é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u,$$

o que conduz a

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

A equação de estados de saída é obtida por:

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

c) Forma canônica diagonal

A equação de estado de entrada dessa forma canônica é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \\ & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Igualmente, a equação de estado de saída é obtida de:

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

10.3 O método da alocação de polos

O método da alocação de polos é, de certo modo, similar ao método do LGR, em que se definem as posições exatas de todos os polos de malha fechada nas posições desejadas. No método de alocação de polos, admite-se que, se o sistema considerado for de estado completamente controlável (pode partir de um estado inicial qualquer a outro final dentro de um intervalo de tempo desejado), será possível alocar os polos de malha fechada em qualquer posição, com o uso de realimentação apropriada.

Nessa técnica, determinam-se os polos de malha fechada requeridos, tomando-se como base as especificações dadas de resposta temporal e/ou em frequência, por exemplo, tempos de subida e coeficiente de amortecimento, bem como especificações de regime permanente, como o tempo de acomodação. Usualmente, o projeto de um sistema de controle toma como base o conhecimento prévio da localização dos polos de malha fechada, visando atingir-se um dado coeficiente de amortecimento e uma frequência natural preestabelecida - na condição de que polos não dominantes não exerçam algum efeito considerável sobre a saída do sistema. A técnica de alocação de polos admite que todos os polos de malha fechada, e não apenas os dominantes, sejam previamente alocados, desde que a controlabilidade total se faça presente.

O projeto específico de controladores baseados no espaço de estados extrapola o escopo desta obra, mas um estudo apurado do tema pode ser facilmente conduzido, na condição de que o leitor se aprofunde no estudo da álgebra linear.

Fique de olho!

O projeto de controladores no espaço de estados é particularmente útil em problemas nos quais um bom modelo matemático do sistema a ser controlado esteja disponível e em que a dimensão dos estados não seja muito elevada. Nessas condições, a técnica se apresenta como de mais rápida implementação do que as técnicas apresentadas na teoria clássica de controle, exigindo, entretanto, o conhecimento de mais parâmetros do que os usuais.

Vamos recapitular?

Foram apresentados, neste capítulo, conceitos referentes à análise de sistemas de controle no espaço de estados, sem adentrar especificamente o modelamento de controladores.

O capítulo abordou, entre outros elementos, as formas canônicas controlável, observável e diagonal, exemplificando a transformação de equações diferenciais em equações matriciais.

Agora é com você!

1) Para os sistemas representados a seguir, obtenha sua representação no espaço de estados, nas formas canônica controlável, observável e diagonal (ou de Jordan, se possível). Determine também os valores de coeficiente de amortecimento de tais sistemas, escolhendo um deles para o qual SS > 50%, e projete um controlador PID conforme a técnica apresentada no capítulo anterior, para que, em malha fechada, o novo valor de SS não exceda 30%.

a) $$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+4}{s^2+3s+4}$$

b) $$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2+2s+2}{s^2+3s+2}$$

c) $$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2+4s+2}{s^3+4s^2+7s+12}$$

d) $$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s}{s^2+12}$$

e) $$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2+4s+2}{s^3+6s+1}$$

f) $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 4}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$

g) $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s + 4}$

h) $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 2}{s^2 - 4s + 2}$

2) Sob que condições a forma canônica de Jordan se apresenta como mais vantajosa em relação à forma diagonal simples? Exemplifique com situações práticas tal escolha.

11

Aplicações de Sistemas de Controle em Processos Industriais

Para começar

Este capítulo tem por objetivo apresentar nichos de aplicação de sistemas de controle, focando majoritariamente em processos industriais cujas estratégias de controle são de usual aplicação.

Os tópicos aqui apresentados não fazem ênfase a uma ou outra técnica de controle descrita nos capítulos anteriores, enfatizando a gama de possibilidades de uso de sistemas de controle a diversas plantas e seus elementos. Dá-se ênfase a dois elementos já descritos no capítulo inicial desta obra: atuadores e sensores, descrevendo-se como estratégias de controle que se aplicam à operação de tais dispositivos em uma planta. Não se busca aqui trazer uma discussão aprofundada sobre a natureza de tais elementos - posto ser essa uma tarefa mais afeita aos preceitos da Robótica -, mas introduzir conexões entre seções físicas de plantas e sistemas de controle a ela associados.

11.1 Introdução às aplicações de Sistemas de Controle

As técnicas de projeto de Sistemas de Controle descritas nos capítulos anteriores se prestam a uma variedade ampla de aplicações, notadamente em processos que envolvem um elevado número de etapas, caso em que plantas industriais se encaixam. De um modo objetivo, este capítulo traz uma correlação entre as técnicas de controle apresentadas e as mais usuais aplicações industriais, em termos dos elementos mecânicos atuadores (componentes que realizam a conversão de energia elétrica, hidráulica ou pneumática em energia mecânica) e sensores (transdutores de grandezas físicas em sinais elétricos correspondentes).

11.2 Elementos de atuação (atuadores)

Atuadores são elementos encontrados em plantas representativas de processos caracterizados substancialmente por produzir algum movimento, sempre comandados por sinais de natureza manual, mecânica (nas modalidades hidráulica ou pneumática) ou elétrica. Na indústria, um atuador é um mecanismo utilizado de forma comum na fabricação de máquinas e equipamentos que se prestam a iniciar ou finalizar funções comandadas por válvulas.

De modo a ressaltar o papel de sistemas de controle sobre o funcionamento de tais dispositivos, as próximas subseções trazem de forma objetiva os tipos de atuadores encontrados na indústria.

11.2.1 Atuadores manuais

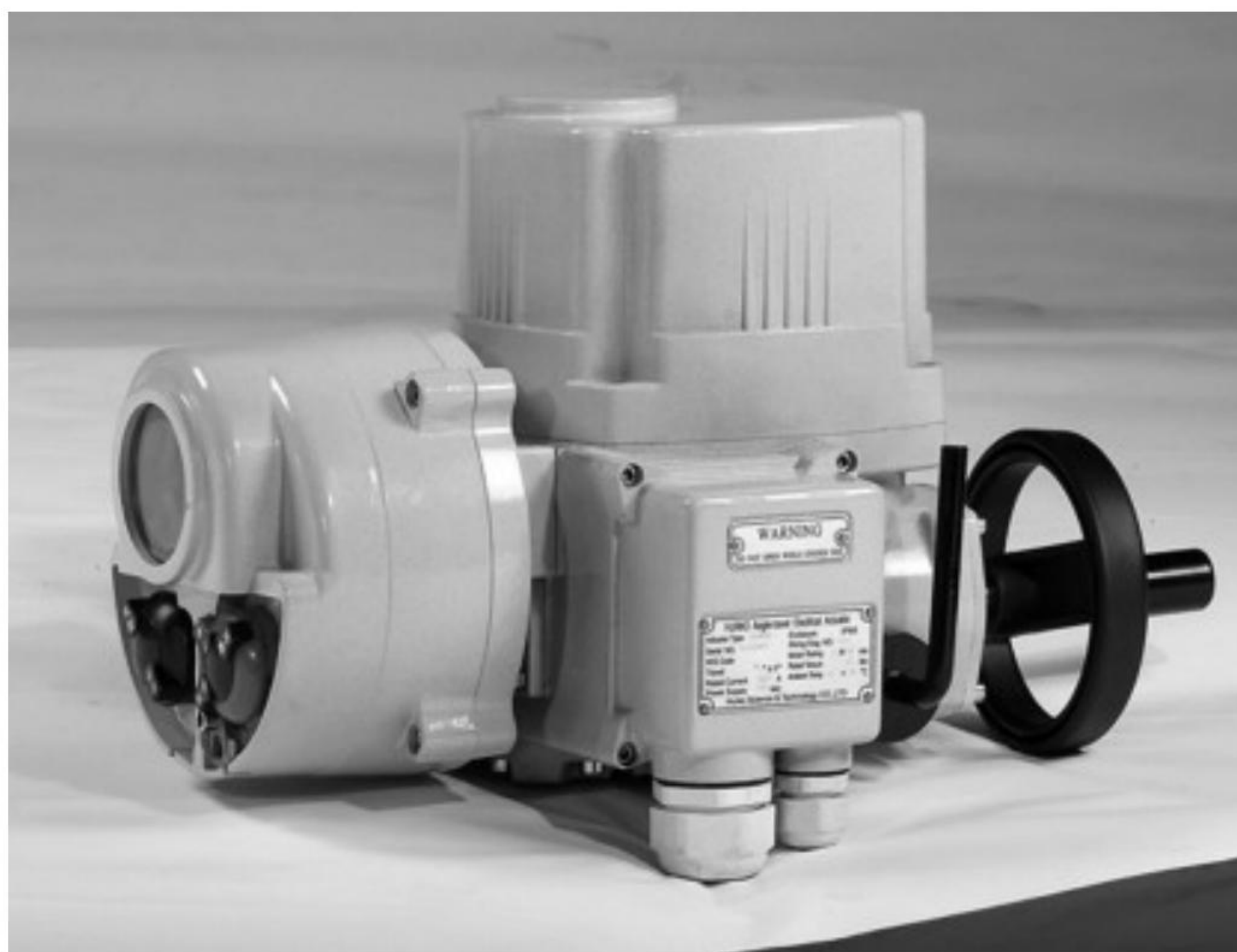
Atuadores manuais correspondem a dispositivos que fazem uso de alavancas, engrenagens ou polias para facilitar o movimento, desacoplados de uma fonte externa de energia que produza tal movimento. É comum o uso de atuadores manuais em tarefas que exijam pouco esforço mecânico, geralmente atrelados a válvulas e outros equipamentos de pequenas dimensões. Todavia, não são recomendados atuadores manuais em ambientes hostis ao ser humano, como em ambientes tóxicos ou insalubres. A Figura 11.1 ilustra um atuador manual.

Valveactuator/Wikimedia Commons

Figura 11.1 - Atuador (cilindro) manual.

A ação básica de controle de atuadores manuais é notadamente representada por um sistema em malha aberta, posto que a observação da saída não produz diretamente um erro a ser realimentado à entrada, de modo a controlar o sinal reinjetado no sistema.

11.2.2 Atuadores hidráulicos

Atuadores hidráulicos são aqueles que fazem uso de fluidos para pressurizar pistões, tornando fácil a realização de dado esforço mecânico. Pelo fato de fluidos hidráulicos não poderem ser comprimidos, variáveis de processo como velocidade e potência são de mais difícil obtenção, permitindo-se, todavia, a sintonia fina de precisão no movimento controlado. Usualmente, atuadores hidráulicos são representados pelo cilindro hidráulico, como mostra a Figura 11.2, cuja função primeira é a de transformar energia hidráulica em energia mecânica. O cilindro hidráulico é parte constituinte de diversos sistemas de manipulação mecânica e articulação, desempenhando a aplicação de uma força em um percurso linear, gerando o movimento de um pistão móvel. Tal força é constante ao longo do movimento do pistão (assim como ao produto da área da seção transversal do cilindro pela pressão da bomba).

Cilindros hidráulicos possuem aplicação conjunta com elementos de maior dimensão, por exemplo, no movimento de pás de retroescavadeiras. São também empregados em outros setores em que se exijam forças elevadas, em detrimento de velocidade.

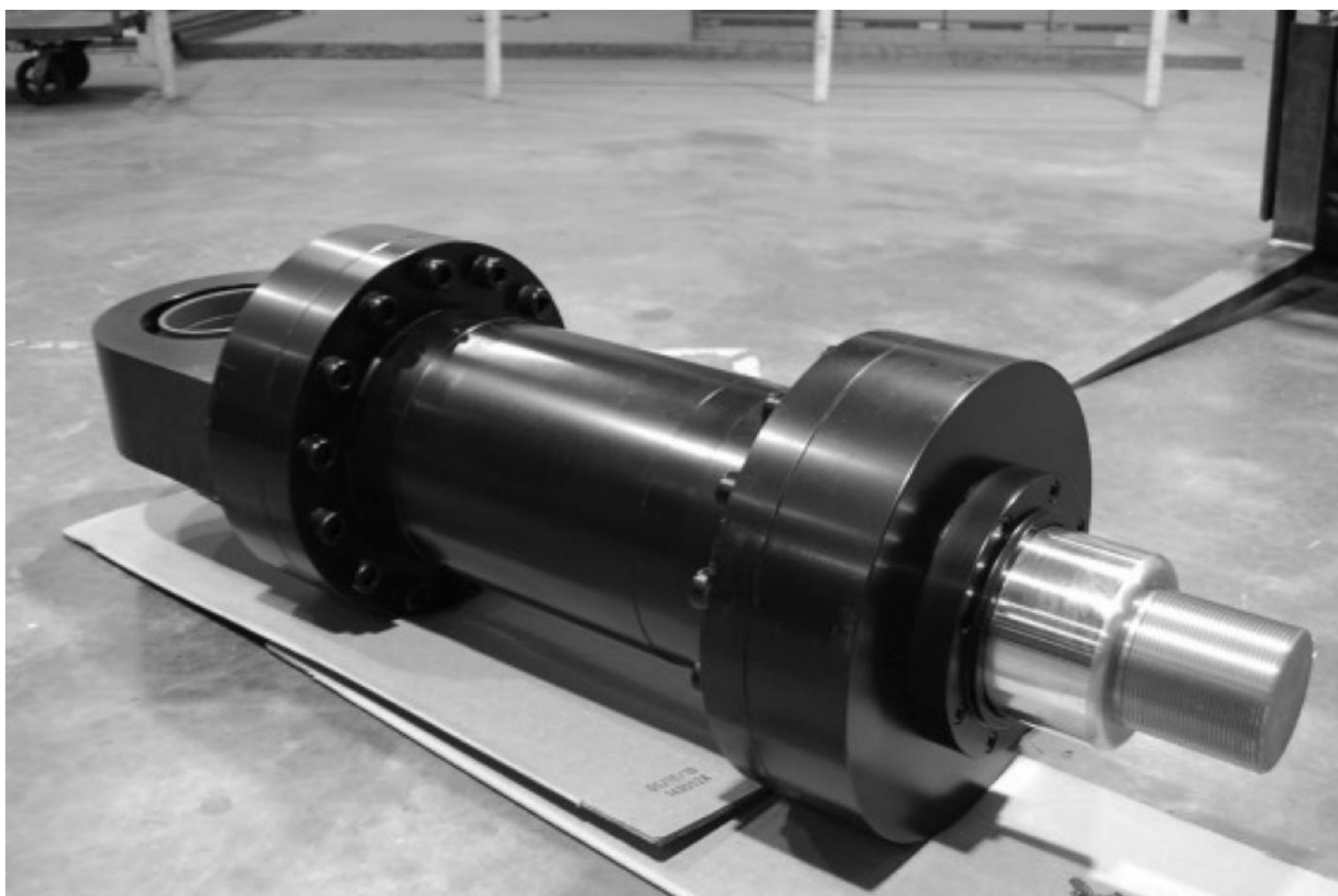
A ação básica de controle de atuadores pneumáticos reside no fato de que se deva privilegiar precisão (ou seja, mínimo erro em regime estacionário), o que pressupõe uma ação de controle proporcional integral, não sendo a velocidade (ou seja, o tempo de subida é o mesmo de acomodação) privilegiada na análise.

Rstom03/Wikimedia Commons

Figura 11.2 - Atuador (cilindro) hidráulico.

11.2.3 Atuadores pneumáticos

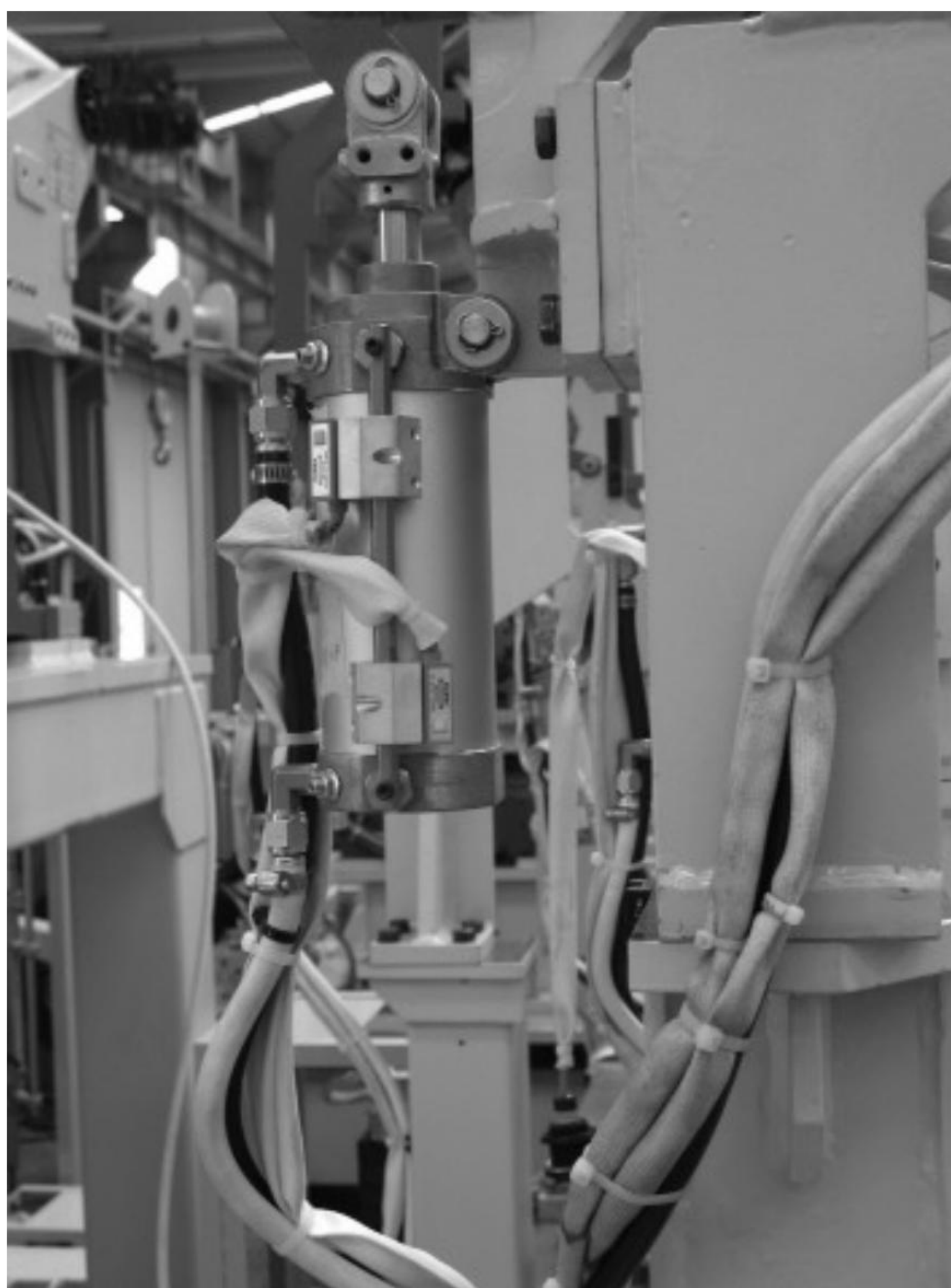
Atuadores pneumáticos são aqueles que utilizam ar para pressurizar os pistões, em vez de outro fluido. Como o ar pode ser comprimido, dispensam regulação prévia; além disso, são mais rápidos nas situações de partida e parada, o que os recomenda para operar em equipamentos mecânicos que requerem mudanças repentinas e bruscas de pressão para executar uma dada tarefa. A Figura 11.3 apresenta um cilindro pneumático que representa tal categoria de atuador.

Mixabest/Wikimedia Commons

Figura 11.3 - Atuador (cilindro) pneumático.

11.2.4 Atuadores elétricos

Atuadores elétricos são aqueles movidos por um motor, o qual fornece torque para operar válvulas em um equipamento mecânico. São comumente utilizados quando o equipamento a realizar movimento requer válvulas multiturno. Uma vez que essas válvulas são utilizadas na presença de maquinário com frequente mudança de marcha em funcionamento, atuadores elétricos sofrem razoável demanda, além de requerer alimentação de backup para funcionamento ininterrupto.

Eles são costumeiramente referidos como motores elétricos - embora a denominação não seja fisicamente inconsistente, prefere-se, aqui, distinguir tais elementos, conquanto motores provoquem

o movimento em si nos atuadores, em vez de representá-los inteiramente. Nesse sentido, motores podem ser subdivididos em:

» Motores de corrente alternada (AC): convertem energia elétrica em energia mecânica.

» Motores de corrente contínua (DC): fazem uso de uma fonte de tensão contínua.

» Motores de passo: comportam-se como motores de corrente contínua desprovidos de escovas e comutadores, dotados de altíssima precisão linear ou angular.

» Servomotores: consistem em motores de passo com pouca capacidade de realizar elevados esforços; são dotados de um sistema de controle interno que verifica a posição de entrada em relação à posição de saída.

As Figuras 11.4 e 11.5 apresentam alguns tipos de atuadores elétricos.

oomlout/Wikimedia Commons

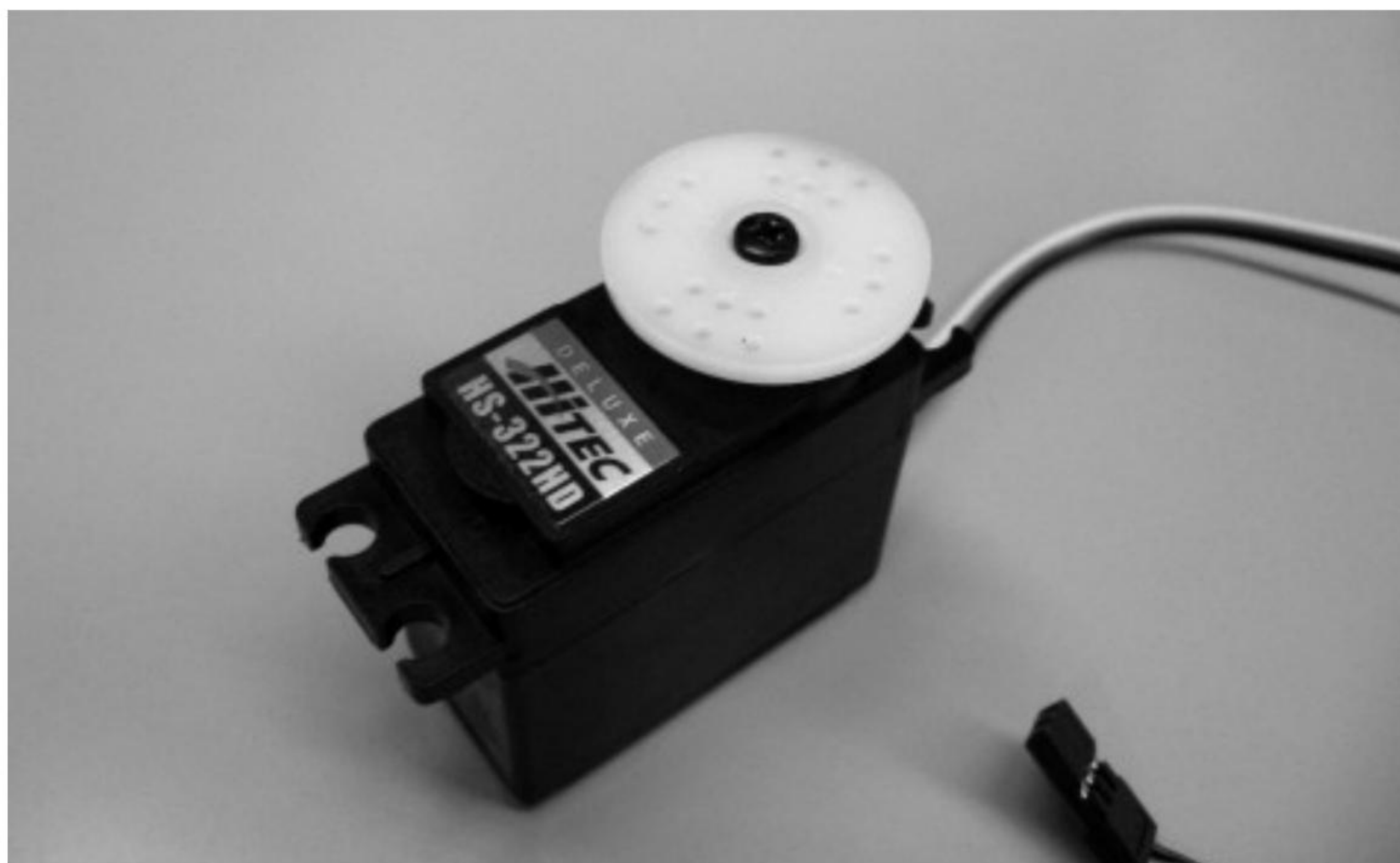
Figura 11.4 - Atuador elétrico - motor de passo.

José Luis Gálvez (Digigalos)/Wikimedia Commons

Figura 11.5 - Atuador elétrico - servomotor.

Fique de olho!

Um servomotor é bastante empregado na otimização da operação de máquinas e equipamentos.

Atualmente, dispõe de elementos de realimentação (malha fechada), em que cada servomotor é acompanhado por um servoconversor, o que permite, por exemplo, o controle do torque de um eixo de máquina para amplas faixas de velocidade de rotação.

Assim, servomotores encontram aplicação tanto em tarefas de pequeno porte quanto em tarefas mais pesadas na indústria, sobretudo quando for desejado o controle em malha fechada de variáveis de processo, como torque, posição ou velocidade.

11.3 Elementos de sensoriamento (sensores)

Sensores são elementos utilizados para medir e monitorar variáveis de processo, como temperatura, vazão, nível, pressão, entre outras, tendo surgido quando da necessidade de automatização dos processos, visando a uma maior eficiência e eficácia dos processos. Podem ser fisicamente descritos como transdutores que alteram sua constituição interna diante da ocorrência de um fenômeno físico externo, convertendo tais estímulos externos em sinais elétricos que atuam sobre a variável de processo causadora desses estímulos. Atualmente, sensores possuem uma extensa gama de aplicações, existindo de variadas formas e modelos. As subseções seguintes descrevem, de forma breve, quatro tipos de sensores, bastante empregados na indústria.

11.3.1 Sensores de nível

Sensores de nível são aqueles que se prestam a mensurar a altura do conteúdo de um reservatório qualquer, que armazene matéria líquida ou sólida. O sensoriamento de nível pode se dar por *medição direta*, cuja referência de medição é o limite superior da substância medida (por exemplo, pelo uso de réguas, gabaritos, visores ou boias), ou por *medição indireta*, cujo nível é determinado com base na medição de outras variáveis de processo, como pressão, radiação, empuxo etc. Veja na Figura 11.6 um exemplo de sensor de nível.

Gillsensors/Wikimedia Commons

Figura 11.6 - Sensor de nível.

11.3.2 Sensores de temperatura

Sensores de temperatura são aqueles que se prestam a mensurar a temperatura de um dado meio ou matéria, convertendo-a em sinal elétrico. Usualmente, dividem-se em:

- Sensores resistivos: resistências dependentes da temperatura.
- Sensores termoelétricos ou termopares: valem-se do efeito Seebeck.
- Sensores de infravermelho: captam radiação eletromagnética no comprimento de onda da radiação infravermelha, sendo tal faixa de frequência característica de emissão de calor.

A Figura 11.7 ilustra um sensor de temperatura.

Harke/Wikimedia Commons

Figura 11.7 - Sensor de temperatura - termopar tipo K.

Amplie seus conhecimentos

Jlorenz1@web.de/Wikimedia Commons

Figura 11.8 - O físico Thomas Johann Seebeck.

Thomas Johann Seebeck

O Físico Thomas Johann Seebeck (1770-1831) foi o descobridor, em 1821, do efeito que leva seu nome, o qual descreve a produção de uma diferença de potencial entre duas junções de condutores (ou semicondutores) de materiais diferentes, quando estas estão sujeitas a diferentes temperaturas. Juntamente com outro efeito físico – Peltier –, o efeito Seebeck descreve com exatidão o funcionamento de termopares.

11.3.3 Sensores de pressão

Sensores de pressão são aqueles que se prestam a converter uma pressão medida em um sinal mecânico ou elétrico, constituídos por um elemento primário (que sofre ação - deformação

ou deflexão -, direta ou indireta, da pressão medida) e por um elemento secundário (que traduz variações de pressão em valores adequados a medição e controle).

Podem ser classificados em:

- Manométricos: tomam como referência a pressão atmosférica.
- Absolutos: tomam como referência a pressão do vácuo.
- Diferenciais: tomam como referência outro valor de pressão previamente conhecido.

Em termos construtivos, sensores de pressão são usualmente encontrados como medidores de coluna líquida, medidores por deformação ou medidores eletroeletrônicos.

A Figura 11.9 mostra um sensor de pressão manométrico.

Zaphod/Wikimedia Commons

Figura 11.9 - Sensor de pressão - manômetro.

11.3.4 Sensores de vazão

Sensores de vazão são aqueles que se prestam a medir a quantidade de material líquido ou gasoso que atravessa determinado ponto de uma tubulação durante certo intervalo de tempo. Os principais tipos de sensores de vazão se baseiam na medição indireta de pressão diferencial (por exemplo, placas de orifício, tubos de Venturi e tubos de Pitot), enquanto outros fazem uso de turbinas ou de campos magnéticos. A Figura 11.10 apresenta um sensor de vazão.

Marcin Chady/Wikimedia Commons

Figura 11.10 - Sensor de vazão - tubo de Pitot inserido na extremidade de uma aeronave.

Fique de olho!

Exemplo interessante do uso de sistemas de controle em plantas industriais é o da válvula redutora de pressão, instalada em sistemas de tubulação conectados a tanques de armazenamento ou reservatórios de líquido ou gás. Essa válvula gerencia a pressão no sistema controlado por meio de um conjunto mola-diafragma, que abranda o fluxo de líquido no sistema, mantendo um nível preajustado de pressão.

Válvulas redutoras de pressão de água são, muitas vezes, instaladas em sistemas residenciais de água, evitando o desperdício que se observaria caso toda a alta pressão de bombeamento de água das ruas fosse utilizada também nas casas.

Vamos recapitular?

Foram descritos neste capítulo elementos que servem de suporte para a aplicação de sistemas de controle em processos ou plantas industriais: os atuadores e os sensores. A operação de tais elementos segue as premissas de controle descritas nos capítulos anteriores, e as características de operação de cada um dos atuadores e sensores apresentados devem se adequar às especificações de desempenho de cada problema.

Agora é com você!

1) Aponte as diferenças básicas entre atuadores e sensores, descrevendo sua importância em uma malha de controle completa.

2) Explique o funcionamento de tubos de Pitot em aeronaves, destacando sua finalidade e os efeitos adversos de seu mau funcionamento.

3) Você acha que o corpo humano é dotado de sensores e atuadores? Forneça exemplos para sua resposta.

Bibliografia

GOLNARAGHI, F.; KUO, B. C. **Digital control systems**. 9. ed. São Paulo: LTC, 2012.

GOPAL, M.; NAGRATH, I. J. **Control systems engineering**. 5. ed. Anshan, 2009.

HAWAD, S. H.; OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S. **Sinais e sistemas**. 2. ed. São Paulo: Prentice-Hall, 2010.

HSU, H. **Sinais e sistemas:** 570 problemas totalmente resolvidos. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

LATHI, B. P. **Sinais e sistemas lineares**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

NISE, N. S. **Engenharia de sistemas de controle**. 5· ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

ROBERTS, M. J. **Fundamentos em sinais e sistemas**. São Paulo: McGraw-Hill Interamericana, 2009.

Marcas registradas

Todos os nomes registrados, marcas registradas ou direitos de uso citados no livro pertencem aos seus respectivos proprietários.

Apêndice

A

Relações Trigonométricas Importantes

1) $\operatorname{tg} a = \dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$

2) $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$

3) $\sec a = \dfrac{1}{\cos a}$

4) $\operatorname{cosec} a = \dfrac{1}{\operatorname{sen} a}$

5) $\operatorname{cotg} a = \dfrac{1}{\operatorname{tg} a}$

6) $\sec^2 a = 1 + \operatorname{tg}^2 a$

7) $\operatorname{cosec}^2 a = 1 + \operatorname{cotg}^2 a$

8) $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a.\cos b \pm \operatorname{sen} b.\cos b$

9) $\operatorname{tg}(a \pm b) = \dfrac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a.\operatorname{tg} b}$

10) $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$

11) $\operatorname{sen}^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$

12) $\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$

13) $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a = 2\cos^2 a - 1$

14) $\operatorname{tg} 2a = \dfrac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$

15) $\left|\operatorname{sen} \dfrac{a}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{2}}$

16) $\left|\cos \dfrac{a}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 + \cos a}{2}}$

17) $\operatorname{tg} \dfrac{a}{2} = \dfrac{1 - \cos a}{\operatorname{sen} a}$

18) $\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\right]$

19) $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$

20) $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

21) $\cos a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)\right]$

22) $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

23) $1 \pm \operatorname{sen} a = 1 \pm \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$

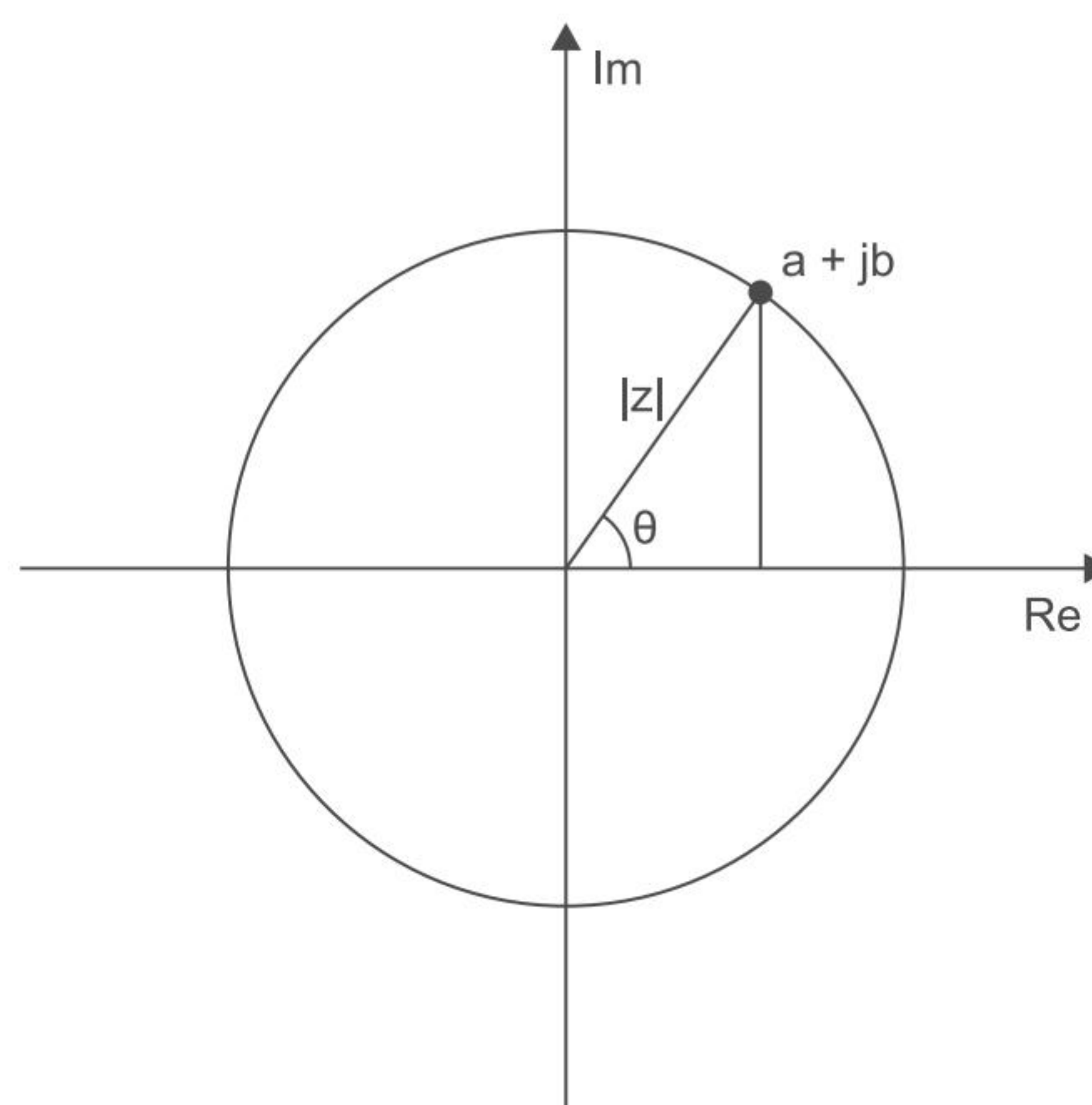
Apêndice

B

Funções Trigonométricas e Propriedades de Números Complexos

Arcos Elementares (Primeiro Quadrante)

Função	a = 30º	a = 45º	a = 60º
sen a	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos a	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg a	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cosec a	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
sec a	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
cotg a	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Propriedades de Números Complexos

1) $z = a + jb = r.e^{j\theta} = r(\cos\theta + j\text{sen}\theta),\ r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \theta = \text{arctg}\frac{b}{a},\ j^2 = -1$

2) $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

3) $z = a + jb,\ z^* = a - jb$

4) $z + z^* = 2.\text{Re}\{z\}$

5) $z.z^* = |z|^2$

6) $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

7) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{z}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + j\text{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

8) $\text{Re}\{z\} = \frac{z + z^*}{2}$

9) $\text{Im}\{z\} = \frac{z - z^*}{2j}$

Apêndice

C

Tabelas de Pares de Transformada de Laplace

	f(t)	F(s)
1	$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$	1
2	$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3...)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$

	f(t)	F(s)
8	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3...)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
9	$\text{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
10	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
11	$\text{senh}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
12	$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
13	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
14	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
15	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt}-ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{ab}\left[1+\frac{1}{a-b}(be^{-bt}-ae^{-at})\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$

Apêndice

D

Propriedades da Transformada de Laplace

$\mathcal{L}\left[Af(t)\right] = AF(s)$
$\mathcal{L}\left[Af_1(t) \pm Bf_1(t)\right] = AF_1(s) \pm BF_2(s)$
$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0_\pm)$
$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0_\pm) - f'(0_\pm)$
$\mathcal{L}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$ (condições iniciais nulas)
$\mathcal{L}\left[\int_n f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s^n}$ (condições iniciais nulas)

$\mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\right] = F(s+a)$
$\mathcal{L}\left[f(t-a)u(t-a)\right] = e^{-as}F(s)$
$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s) \ \ (n = 1, 2, 3...)$
$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{a}\right] = aF(as)$
$\mathcal{L}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right] = F_1(s) \cdot F_2(s)$
$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$